在几何的广阔天地中翱翔

数学的主要任务是研究现实世界的数量关系和空间形式.

研究数量关系是算术和代数的主要任务，而研究空间形式则由几何承担.

在历史上，数学科学首先是作为几何学出现的. 这也难怪，人们放眼看去，四面八方，天高地广，都是千姿百态、形状各异的物体，其中自然就蕴藏着各种几何图形的概念和相互关系，吸引人们去探究其中的奥秘. 最古老的几何是从土地的测量、房屋的建筑开始的，与人们的生存和生活密切相关. 几何从诞生的那天起，就是生动的，形象的，实用的. 而当人们探索它的奥秘时，又发现它的内在联系是深刻的，引人入胜，魅力无穷.

同学们在初中数学中已经学习了平面几何的一些初步知识. 然而，我们不是生活在平面里而是生活在空间中. 鹰击长空，鱼翔浅底，非平面所能容纳. 我们居住的房屋，使用的桌椅板凳，也不能压扁在一个平面内. 平面图形只是作为空间图形的表面或截面而存在的，它们固然是我们研究几何的入门和基础，但我们终究还是需要突破平面的范围，研究空间的各种几何体，研究它们的形状和大小，研究它们各组成部分之间的位置关系，等等. 而这些就是立体几何的基本内容. 本册书将带领你进入立体几何的大门，在立

体几何的广阔天地中作一些初步的浏览和探索.

怎样探索？既然是几何，既然是研究图形，就需要睁开眼睛自己观察，获取大量的素材. 但这还不够，既然是科学，就不能只停留在所观察到的现象，还要开动脑筋，充分发挥想象力，将观察到的事物向宏观和微观扩展；充分发挥抽象思维能力，透过表面现象发现其中蕴藏的规律. 还需要自己动手，包括借助于计算机等现代化技术手段，通过计算和实验将大脑所想到的事情完成，将大脑所猜测的事情加以验证.

当然，你会发现，以前学过的平面几何知识对于立体几何仍是非常重要和有用的，大量的立体几何问题可以适当转化为平面几何的问题来加以解决.

数学的两大任务——研究数量关系和空间形式，分别由代数和几何来承担. 但是，这两大任务不是截然分开，而是密切相关的. 不但图形的大小需要用数来计算，长度、面积和体积需要用数来计算，而且图形的形状也可以用数来描述，用代数计算的方法来研究. 因此，代数和几何是密切相关的，几何问题也可以用代数方法来解决. 你在初中学习平面几何时主要是通过观察和推理研究图形的性质，而在本书中学到的解析几何则是用代数方法研究几何图形的性质. 它的基本思想方法，就是将几何问题化为代数问题，用坐标描述点，用方程描述曲线、曲面等几何图形，将图形的有关性质转化为数与方程，通过代数计算和变形的方法来解决. 当然，本册教材只能让你对解析几何的知识有一些初步的了解，用解析几何的方法对直线、圆等基本的平面几何图形作一些讨论.

本书对立体几何和解析几何的介绍都是初步的，你在高中阶段的选修课程中还可以学习到更多的几何知识，比如：研究更多的几何图形（如圆锥曲线，球面上的图形），掌握更多的方法（如用向量处理立体几何，用推理的方法研究更多的几何问题），等等．当然，学习和研究是无止境的．对于几何学来说，整个高中阶段所提供的也还只能算是初步的知识，更多更深入的知识还有待于大学阶段的学习或自己去研究和发明创造．

几何的天地宽广无际，等着你去自由翱翔．

你准备好了吗？

主　　编　张景中　黄楚芳

执行主编　李尚志

本册主编　李尚志

编　　委　郑志明　查建国　冯大学

　　　　　罗培基　贺仁亮

目录

第6章 立体几何初步

锥顶柱身立海天，
高低大小也浑然.
平行垂直皆风景，
有角有棱足壮观.

本章将学习立体几何的一些初步而又基本的知识，包括观察一些常见的空间几何体，认识一些空间几何体的结构特征，结合这些常见的几何体来研究空间的点、线、面的一些基本关系，从而培养和发展空间想象能力，及运用图形语言进行交流的能力.

6.1 空间的几何体

现实生活中我们无处不与形状各异的物体打交道. 图中的建筑物所体现的就是各种不同形状的几何体，你能说出它们的名称吗？它们有哪些性质是我们将要讨论的？

6.1.1 几类简单的几何体

在小学和初中数学中，我们已经认识过一些简单的几何体．你见过图 6-1 中的几何体吗？知道它们的名称吗？在前面照片上的建筑中，你能找出哪些部分类似于这些几何体？

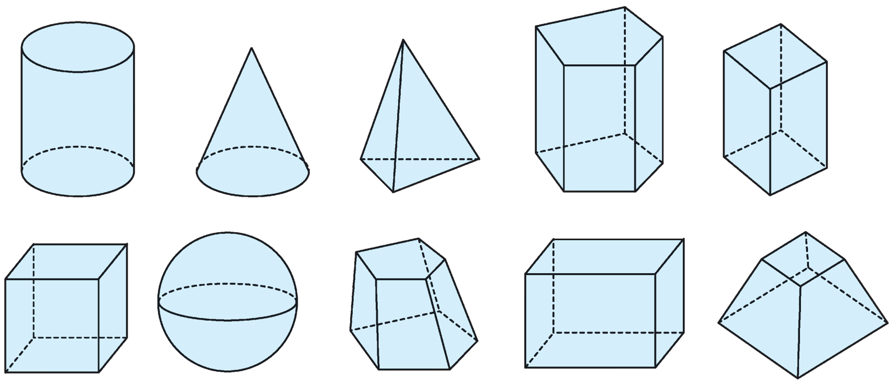


图 6-1

观察与思考

仔细观察以上的几何体以及生活中类似的几何体，想一想它们各有什么特点？哪些几何体有共同点，可以归为一类？

观察发现，其中有些几何体是由平面多边形围成的．由多边形围成的几何体称为**多面体**（polyhedron），这些多边形称为多面体的**面**(face)．其中每个多边形的边，也就是两个相邻的面的公共边，称为多面体的**棱**（edge)．每个多边形的顶点，也就是每条棱的端点，称为多面体的**顶点**（vertex)．

进一步观察和思考：这些多面体各有什么特点？它们分别由什么样的多边形围成？各个面之间的位置关系有什么特点？各条棱呢？根据这些多面体的不同点和共同点能否再进一步分类？

观察以下的多面体.

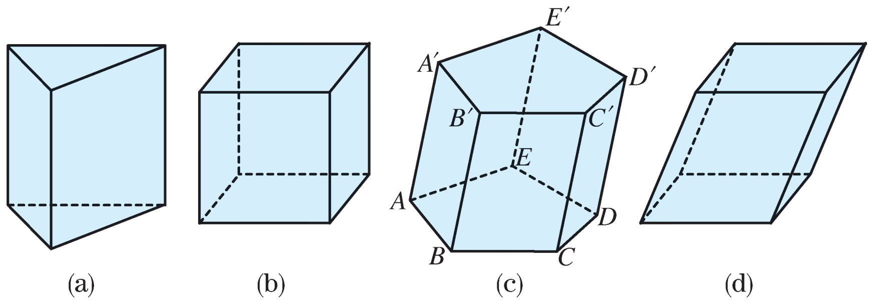


图 6-2

我们发现它们的共同点是周围由平行四边形围成，每个多面体的上、下两面都是边数相同的多边形，上、下两个面所在平面都不会相交.

关于平面的平行，在 6.2 节中我们将详细讨论.

我们把不会相交的两个平面说成是两个互相平行的平面. 像这样有两个面相互平行、其余各面都是同时与这两个面相邻的平行四边形的多面体叫作**棱柱**（prism）.

两个互相平行的面叫作棱柱的**底面**（base face），其余各面（都是平行四边形）叫作棱柱的**侧面**（side face）. 相邻两个侧面的公共边叫作棱柱的**侧棱**（lateral edge）. 所有的侧棱互相平行.

既不在同一底面上也不在同一个侧面上的两个顶点的连线叫作棱柱的对角线.

侧面平行四边形都是矩形的棱柱称为**直棱柱**（right prism）.

如图 6-2(c)中的棱柱，多边形 $ABCDE$ 和 $A'B'C'D'E'$ 是两个底面，平行四边形 $ABB'A'$，$BCC'B'$，…是侧面，AA'，BB'，…是侧棱.

棱柱可以用它的两个底面各顶点的字母来表示，如图 6-2（c）中的棱柱表示为棱柱 $ABCDE-A'B'C'D'E'$. 棱柱也可以用它的某一条对角线的两个端点的字母来表示，如图 6-2（c）中的棱柱也可表示为棱柱 AC' 或棱柱 BD' 等.

棱柱的底面可能是三角形、四边形、五边形等，这样的棱柱分别称为三棱柱、四棱柱、五棱柱等.

如果棱柱的底面和侧面都是矩形，这样的棱柱就是**长方体**（cuboid），而所有棱长都相等的长方体就是**正方体**（cube）.

多知道一点

平行六面体

如果棱柱的底面也是平行四边形，则这个棱柱由六个平行四边形围成，其中任何两个不相邻的平行四边形都相互平行且全等，可以看作棱柱的两个底面．这样的几何体称为**平行六面体**(parallelopiped)(如图 6-3)．

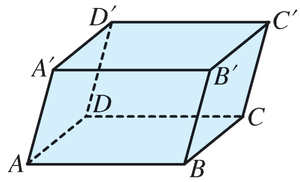


图 6-3

长方体和正方体是平行六面体的特殊情形．

想象与思考

想象一个多边形 $A'B'C'D'E'$ 水平地悬浮在水平的桌面上方，太阳光(平行光线)从上方照射到这个多边形上，在桌面上投下一个影子 $ABCDE$，则 $ABCDE$ 是与 $A'B'C'D'E'$ 平行且全等的多边形，在这两个多边形之间的阴影部分组成的几何体就是棱柱 $A'B'C'D'E'-ABCDE$，其中经过 $A'B'C'D'E'$ 的每个顶点的光线就是这个棱柱的各条侧棱．

观察下面的几何体(如图 6-4)：

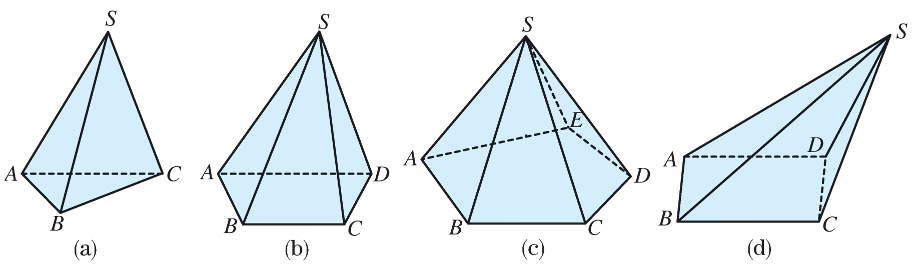


图 6-4

它们的共同点是有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，像这样的多面体叫作**棱锥**（pyramid）.

有公共顶点的三角形面叫作棱锥的侧面，剩下的这个多边形面叫作棱锥的底面．各个侧面的公共点称为棱锥的顶点.

相邻两个侧面的公共边叫作棱锥的侧棱．所有的侧棱相交于棱锥的顶点.

如图 6-4（c）中的棱锥，多边形 $ABCDE$ 是底面，三角形 SAB，SBC，…是侧面，SA，SB，…是侧棱，S 是顶点.

棱锥可以用表示它的顶点和底面各顶点的字母来表示，如图 6-4（c）中的棱锥表示为棱锥 $S-ABCDE$，也可用顶点和底面一条对角线端点的字母来表示棱锥，如棱锥 $S-AC$.

棱锥的底面可能是三角形、四边形、五边形等，这样的棱锥分别称为三棱锥、四棱锥、五棱锥等.

过棱锥侧棱上一点，用一个平面去截棱锥，当截面与底面平行时，截面与底面之间的几何体有什么特点？如图 6-5 中，我们很容易发现，截面与底面是同样边数的多边形，侧面都是梯形．这就是棱台.

观察发现，截得的 $A'B' \parallel AB$，$B'C' \parallel BC$，$C'D' \parallel CD$，$D'A' \parallel DA$，截得的侧面都是梯形.

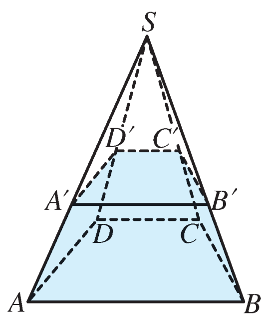


图 6-5

过棱锥的任一侧棱上不与侧棱端点重合的一点，作一个平行于底面的平面去截棱锥，截面和原棱锥底面之间的部分叫作**棱台**（prismoid）．截面和原棱锥底面分别叫作棱台的上底面和下底面，其余各面叫作棱台的侧面．棱台的侧面都是梯形．相邻侧面的公共边叫作棱台的侧棱．既不在同一底面上也不在同一个侧面上的两个顶点的连线叫作棱台的对角线.

如图 6-5 中，多边形 $A'B'C'D'$ 和 $ABCD$ 分别是棱台的上、下底面，梯形 $ABB'A'$，$BCC'B'$，…是侧面，$A'A$，$B'B$，…是侧棱.

棱台用上、下底面多边形各顶点字母来表示，如图 6-5 中的棱台表示为棱台 $A'B'C'D'$-$ABCD$；或者用它的对角线端点字母来表示，如图 6-5 中的棱台也可表示为棱台 BD'.

由三棱锥、四棱锥、五棱锥等所截得的棱台，分别称为三棱台、

四棱台、五棱台等.

下面我们来认识和描述圆柱、圆锥、圆台.

圆钢呈圆柱形，铅锤呈圆锥形，饮料杯呈圆台形（如图 6-6），这样形状的物体还有很多.

图 6-6

圆柱、圆锥、圆台都不是由平面图形围成，但它们都可以由平面图形绕轴旋转而成.

分别以矩形的一边、直角三角形的一条直角边、直角梯形的垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴，其余各边旋转一周而形成的曲面所围成的几何体分别叫作**圆柱**（circular cylinder）、**圆锥**（circular cone）、**圆台**（frustum of cone）（如图 6-7）. 旋转轴叫作它们的**轴**（axis），在轴上这条边的长度叫作它们的**高**（height），垂直于轴的边

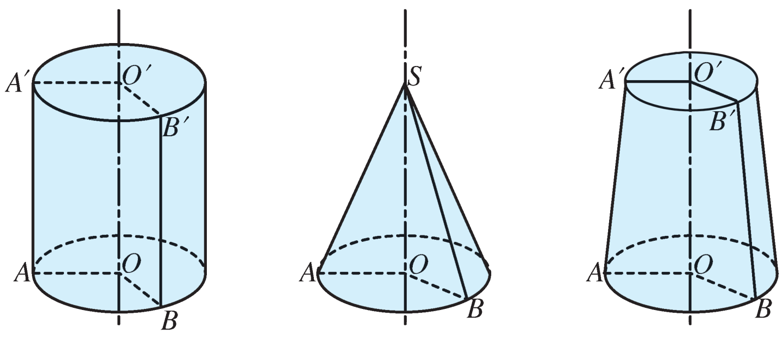


图 6-7

旋转而成的圆面叫作它们的**底面**，不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫作它们的**侧面**，无论旋转到什么位置，这条边都叫作侧面的**母线**（generating line）. 如图 6-7，直线 $O'O$，SO 是轴，线段 $O'O$，SO 是高，$A'A$，$B'B$，SA，SB 等是母线.

圆台也可以看做是用平行于某个圆锥底面的平面截这个圆锥而得

你注意到了吗？垂直于轴的边 OA，$O'A'$ 旋转成的面都是平的，不垂直于轴的边 AA'，SA 旋转成的面都是弯曲的.

到的.

圆柱、圆锥、圆台用表示它的轴的字母来表示，如圆柱 $O'O$、圆锥 SO、圆台 $O'O$.

圆柱、圆锥、圆台有下面的性质：

（1）平行于圆柱、圆锥、圆台的底面的截面都是圆；

（2）圆柱、圆锥、圆台的轴截面分别是全等的矩形、等腰三角形、等腰梯形.

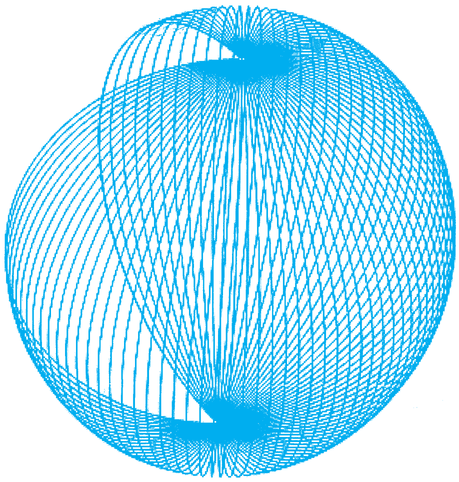


图 6-8

以半圆的直径为旋转轴、半圆弧旋转一周形成的曲面围成的几何体叫作**球**(ball)，如图 6-8. 球的表面称为**球面**(sphere). 这个半圆的圆心就是这个球的**球心**(center of sphere)，这个半圆的半径就是这个球的**半径**(radius). 球具有下面的性质：

（1）球面上所有的点到球心的距离都相等，等于球的半径；

（2）用任何一个平面去截球面，得到的截面都是圆. 其中过球心的平面截球面得到的圆的半径最大，等于球的半径.

观察、想象与思考

在本章章头图、第 2 页图及图 6-9 中找我们所学过的几何体.

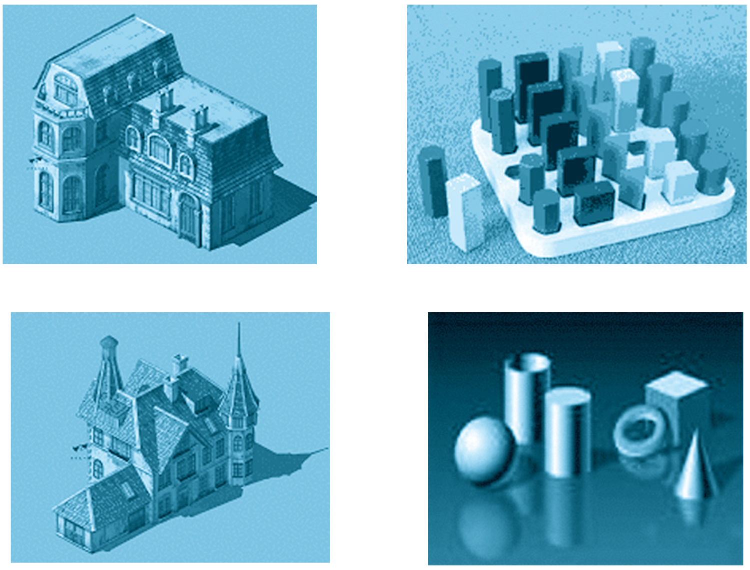


图 6-9

练 习

1. 举出现实生活中的棱柱、棱锥、棱台的实例（至少各举一例）.
2. 举出现实生活中的圆柱、圆锥、圆台的实例各一个.
3. 在图 6-10 的建筑物中找我们所熟悉的几何体并与同桌交流.

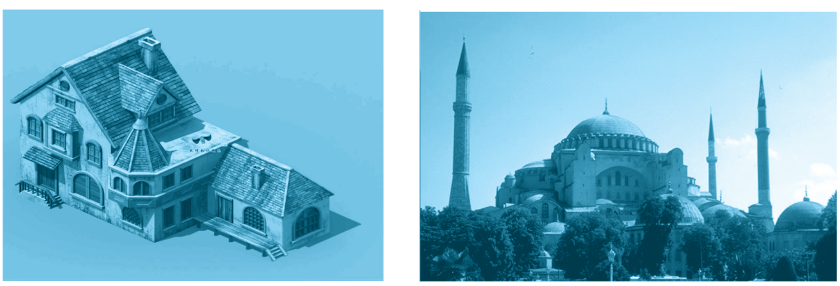


图 6-10

习题 1

学而时习之

1. 用硬纸板制作一个三棱柱.
2. 用橡皮泥制作一个三棱锥和一个四棱台.
3. 用适当硬度的纸板制作圆柱、圆锥和圆台各一个.

温故而知新

4. 上网在搜索栏目中输入关键词：几何体的图形. 找到相关内容进行阅读，并下载其图形.

6.1.2 在平面上画立体图形

一、三视图与直观图

我们在初中学习了如何识别简单的立体图形的三视图和如何画立体图形的三视图．三视图是指我们从三个方向所看到的图形，分为从正面看到的正视图、从左面看到的左视图（或从右面看到的右视图）和从上面看到的俯视图．

例 1 有一座纪念碑，底座是一个长方体，底座的底面是长为4 m，宽为 3 m 的长方形，高为 1 m；底座上面的碑体也是长方体，放在底座的正中，各面相应地与底座的各面平行，且长边平行于长边，其底面是长为 1 m，宽为 0.5 m 的长方形，高为 5 m．请用 1 cm 表示 1 m 画出该纪念碑的三视图．

解 如图 6-11．

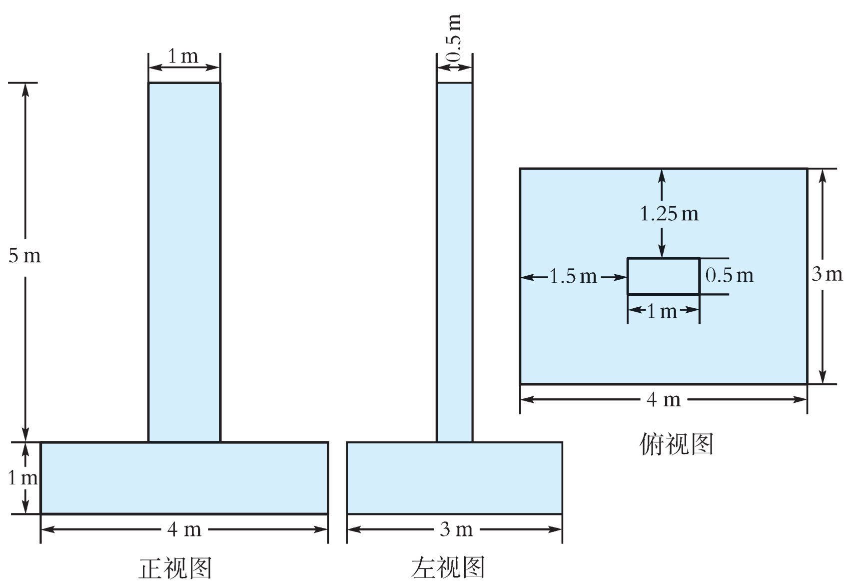


图 6-11

例 2 如图 6-12，是一个立体图形的三视图，请说明这个图形是怎样构成的．

解 这是一个圆柱上面放着一个圆锥的组合图形．

如果不用三视图，我们还有没有其他方法在平面内表示空间图形

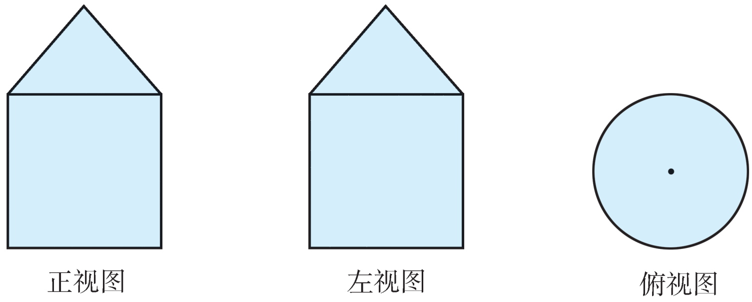


图 6-12

呢？还可以用直观图.

画空间图形的直观图，一般都遵守统一的规则. 下面举例说明空间图形直观图的画法.

例 3 画水平放置的正六边形（如图 6-13（a））的直观图.

画法（1）在已知六边形 $ABCDEF$ 中，取对角线 AD 所在的直线为 x 轴，取与 AD 垂直的对称轴 GH 为 y 轴，x 轴、y 轴相交于点 O. 任取点 O'，画出对应的 x'轴、y'轴，使$\angle x'O'y'=45°$.

（2）以点 O'为中点，在 x'轴上取 $A'D'=AD$，在 y'轴上取 $G'H'=\frac{1}{2}GH$，以点 H'为中点画 $F'E'\parallel x'$轴，并使 $F'E'=FE$；再以 G'为中点画 $B'C'\parallel x'$轴，并使 $B'C'=BC$.

（3）顺次连结 A'，B'，C'，D'，E'，F'，A'，所得到的六边形 $A'B'C'D'E'F'$就是水平放置的正六边形 $ABCDEF$ 的直观图（如图 6-13（b））.

注 图画好后，要擦去辅助线，如图 6-13（c）.

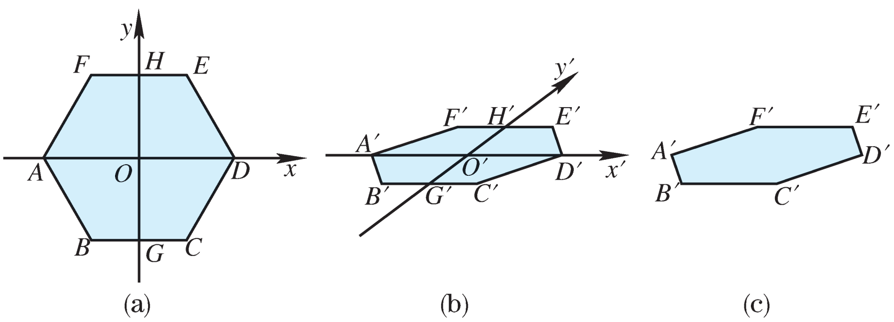


图 6-13

例 4 画棱长为 2 cm 的正方体的直观图.

画法 (1) 作底面正方形 $ABCD$ 的直观图（图 6-14），使 $\angle BAD=45^\circ$，$AB=2$ cm，$AD=1$ cm.

(2) 过 A 作 z' 轴使 $\angle BAz'=90^\circ$，分别过点 A，B，C，D，沿 z' 轴的正方向取 $AA' \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} BB' \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} CC' \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} DD'=2$ cm.

(3) 连结 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$，得到的图形就是所求的正方体直观图（图 6-14）.

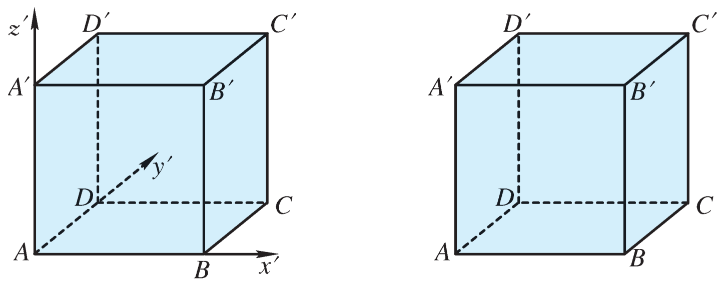


图 6-14

上面画直观图的方法叫作**斜二测画法**. 这种画法的规则是：

(1) 在已知图形中取水平平面，取互相垂直的轴 Ox，Oy，再取 Oz 轴，使 $\angle xOz=90^\circ$，且 $\angle yOz=90^\circ$；

(2) 画直观图时，把它们画成对应的轴 $O'x'$，$O'y'$，$O'z'$，使 $\angle x'O'y'=45^\circ$（或 135°），$\angle x'O'z'=90^\circ$. $x'O'y'$ 所确定的平面表示水平平面；

(3) 已知图形中平行于 x 轴、y 轴或 z 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴、y' 轴或 z' 轴的线段；

(4) 已知图形中平行于 x 轴和 z 轴的线段，在直观图中保持长度不变；平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半.

练 习

1. 画出图 6-15 中电视机的三视图.

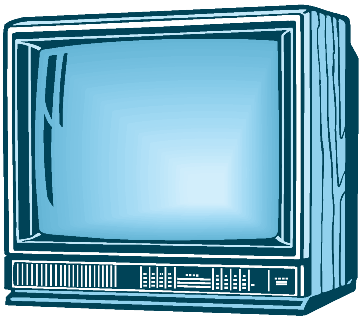


图 6-15

2. 下面的说法正确吗？

(1) 水平放置的正方形的直观图可能是梯形；

(2) 两条相交直线的直观图可能平行；

(3) 互相垂直的两条直线的直观图仍然互相垂直.

3. 用斜二测画法画下列图形：

(1) 水平放置的边长为 4 cm 的正方形；

(2) 长、宽、高分别为 5 cm，4 cm，3 cm 的长方体.

多知道一点

正等测画法

圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆. 圆的直观图，一般不用斜二测画法，而用**正等测画法**. 它的规则是：

(1) 如图 6-16，取互相垂直的直线 Ox，Oy 作为已知图形 $\odot O$ 所在平面直角坐标系的 x 轴、y 轴，画直观图时，把它们画成对应的轴 $O'x'$，$O'y'$，使 $\angle x'O'y'=120°$（或 $60°$）. $O'x'$，$O'y'$ 确定的平面表示水平平面；

(2) 已知图形上平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中，分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段；

(3) 平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中保持长度都不变.

这样得到的圆的直观图是椭圆，这样画椭圆往往比较麻烦，我们

可以采用初中学过的画近似椭圆的方法，画圆柱、圆锥、圆台时，我们先用这种方法画出底面，再用前面一样的方法画其余部分.

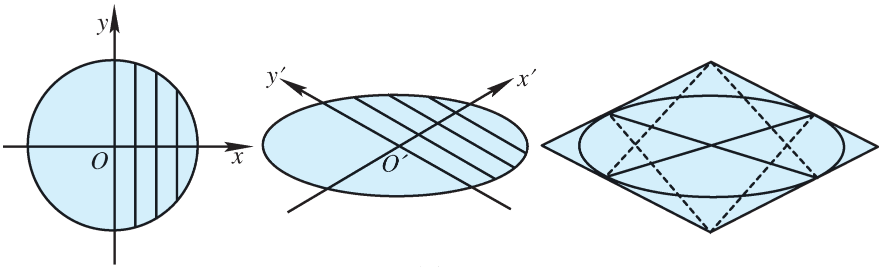


图 6-16

二、中心投影和平行投影

观察图 6-17，太阳光线(假定太阳光线是平行的)把一个长方形的窗框投射到地板上，变成了平行四边形. 框边的长度、框边之间的夹角有所改变,但框边的平行性没有改变. 另外我们还可看到，平行直线段或同一条直线上的两条线段的比也没有改变. 例如,一条线段的中点投射的影子,仍是这条线段的中点. 正是这些不变性质，使我们能够用平面图形来表示空间图形.

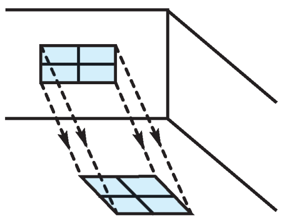


图 6-17

我们前面提到的太阳光线把窗框投到地板上的影子，实际上是一种平行投影的结果，因为我们可以把太阳光线看成是平行的. 实际生活中，我们还会遇到许多不平行的光线. 比如，电灯泡发出的光线，可以近似地看成从一个点发出的光线，这种光线形成的影子我们叫作中心投影.

投影中心距投影面有限远时，投射线都经过投影中心的投影法叫作**中心投影法**，用此法得到的投影叫作**中心投影**（central projection）(也称作透视投影)，如图 6-18（a）. 如果所有的投射线都互相平行，或看作投影中心在无限远处，这种投影法叫作**平行投影法**，用此法得到的投影叫作**平行投影**（parallel projection），如图 6-18（b）.

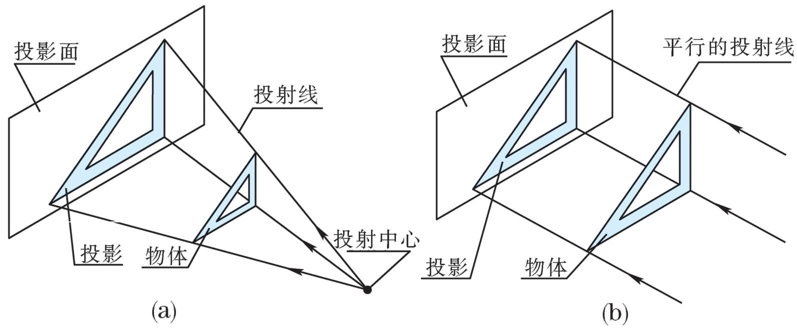


图 6-18

前面画的三视图，就是从三个不同方向对所画物体作平行投影得到的.

练 习

举出实际生活中的中心投影和平行投影的实例各一个.

习题 2

学而时习之

1．画长、宽、高分别等于 4 cm，3 cm，2 cm 的长方体的三视图.

2．画出水平放置的边长为 2 cm 的正五边形的直观图.

3．画长、宽、高分别等于 4 cm，3 cm，2 cm 的长方体的直观图.

温故而知新

4．利用中心投影和平行投影画一个水平放置的正三角形在水平面上的投影.

5．画底面半径为 2 cm，高为 3 cm 的圆锥的直观图.

实习作业

画建筑物的视图与直观图

要求： 将班级平均分成四组，从东西南北不同方向画所在学校的教学楼或综合楼的视图和直观图（如果学校不具备条件，可就近找一个建筑物来画，也可由老师提供相片或幻灯片来画）．同时，用照相机在相应的位置对同样的建筑物照相，将印出的相片与各小组所画的视图和直观图进行比较．

画图时用 16 开大小的纸，画出的图形要尽量和原图成比例，不用考虑颜色，重点注意结构关系．

6.1.3 面积和体积公式

一、表面积公式

我们知道：几何体的表面积是指该几何体的各个面的面积之和.

前面所涉及的几何体：棱柱（长方体是特殊的棱柱）、棱锥、棱台、圆柱、圆锥以及圆台，它们的表面积（即全面积）都是指侧面积和底面积之和. 而它们的侧面都可以展开在平面上，因此，它们的表面积就可以求得.

首先它们的底面都是多边形或圆，都可以直接求面积. 至于侧面我们来逐一分析.

对一个较复杂的图形我们往往把它分割成几个部分来各个击破，这种分割的方法是求面积或体积的一种重要方法.

棱柱侧面都是平行四边形，可以用平行四边形的面积公式 $S=ah$（其中 a，h 分别是一边和这边上的高）求各侧面的面积，再求和.

棱锥侧面都是三角形，可以用三角形的面积公式 $S=\frac{1}{2}ah$（其中 a，h 分别是底和高）求各侧面的面积，再求和.

棱台侧面都是梯形，可以用梯形的面积公式 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$（其中 a，b，h 分别是上底、下底和高）求各侧面的面积，再求和.

把圆柱、圆锥、圆台的侧面沿着它们的一条母线剪开，它们的侧面就可展开在平面上，展开图的面积就是它们的侧面积.

图 6-19 是圆柱的侧面展开图，它是一个矩形. 这个矩形一边的长等于圆柱底面周长 c，另一边的长等于圆柱侧面的母线长 l(也是圆柱的高). 由此可得：

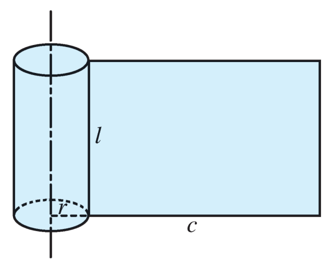


图 6-19

公式 1 如果圆柱底面半径是 r，周长是 c，侧面母线长是 l，那么它的侧面积是

$$S_{圆柱侧}=cl=2\pi rl$$

图 6-20 是圆锥的侧面展开图，它是一个扇形. 这个扇形的弧长

等于圆锥底面的周长 c，半径等于圆锥侧面的母线长 l，由此可得：

公式 2 如果圆锥底面半径是 r，底面周长是 c，侧面母线长是 l，那么它的侧面积是

$$S_{\text{圆锥侧}}=\frac{1}{2}cl=\pi rl$$

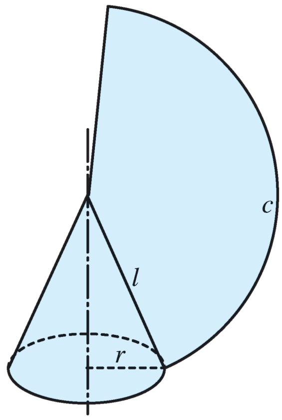


图 6-20

图 6-21 是圆台的侧面展开图.

设圆台侧面的母线长为 l，上、下底面周长分别是 c'，c，半径分别是 r'，r. 将圆台看成用平行于某圆锥底面的平面去截这个圆锥得到的. 设截去的小圆锥的母线长为 x，则截之前的大圆锥的母线长为 $x+l$. 圆台的侧面展开图是一个半径为 $x+l$ 的扇形去掉一个与它具有同一个圆心角，半径为 x 的小扇形之后剩下的部分，称为扇环. 扇环的面积也就是圆台的侧面积，因此

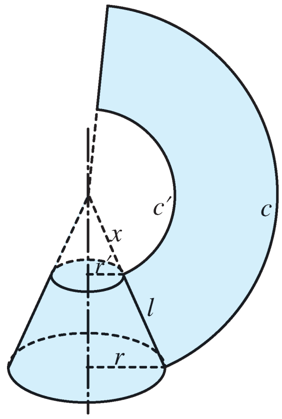


图 6-21

$$\begin{aligned}S_{\text{圆台侧}}&=\frac{1}{2}c(l+x)-\frac{1}{2}c'x\\&=\frac{1}{2}[cl+(c-c')x].\end{aligned} \qquad ①$$

由 $\dfrac{c'}{c}=\dfrac{x}{x+l}$， 得 $x=\dfrac{c'l}{c-c'}$.

代入①，得

$$S_{\text{圆台侧}}=\frac{1}{2}\left[cl+(c-c')\frac{c'l}{c-c'}\right]=\frac{1}{2}(c+c')l=\pi(r+r')l.$$

这个公式的证明不要求同学们掌握，只要会用公式就行了.

公式 3 如果圆台的上、下底面半径分别是 r'，r，周长分别是 c'，c，侧面母线长是 l，那么它的侧面积是

$$S_{\text{圆台侧}}=\frac{1}{2}(c+c')l=\pi(r+r')l$$

在圆台的侧面积公式中，如果设 $c'=c$，就得到圆柱侧面积公式：$S_{圆柱侧}=cl$. 如果设 $c'=0$，就得到圆锥侧面积公式：$S_{圆锥侧}=\frac{1}{2}cl$. 这样，圆柱、圆锥、圆台的侧面积公式之间的关系可表示如下：

$$S_{圆台侧}=\frac{1}{2}(c+c')l$$

$c'=c$ $\qquad$ $c'=0$

$$S_{圆柱侧}=cl \qquad S_{圆锥侧}=\frac{1}{2}cl$$

可见，圆柱、圆锥都可以看成是特殊的圆台，侧面积可以统一用圆台的侧面积公式来计算.

圆柱、圆锥、圆台的**全面积**，分别等于它们的侧面积与底面积之和.

公式 4 设球的半径为 r，则球的表面积是

这个公式的推导需要用到微积分知识，今后再介绍.

$$S_{球}=4\pi r^2$$

例 1 已知一个圆锥的底面半径为 2，高为 $2\sqrt{3}$. 求圆锥的侧面积.

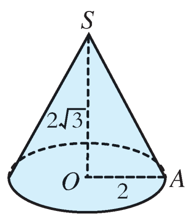


图 6-22

解 如图 6-22，$OA=2$，$SO=2\sqrt{3}$. 由勾股定理可得 $SA=4$，

∴ $r=2$，$l=4$.

∴ $S_{圆锥侧}=\pi rl=8\pi$.

例 2 求 6.1.2 节的例 1 中纪念碑的全面积.

为什么？

解 该纪念碑的表面积可看成是底座全面积加上碑体的侧面积.

$S=2\times(4\times3+3\times1+4\times1)+2\times(1\times5+0.5\times5)$

$=53(m^2)$.

练 习

1. 一个圆台，高为 4 cm，下底面半径为 4 cm，上底面半径为 6 cm．求圆台的全面积．
2. 一个几何体，共六个侧面，六个侧面都是全等的等腰梯形，等腰梯形的上底长为 9 cm，下底长为 15 cm，腰为 5 cm，上、下底面都是正六边形．求该几何体的全面积．

二、体积公式

例 3 一个几何体，下底面是长为 20 cm 和宽为 16 cm 的矩形，上底面是长为 12 cm 和宽为 8 cm 的矩形，长边平行于长边，侧面都是梯形，上、下底面平行，高为 2 cm，求体积．

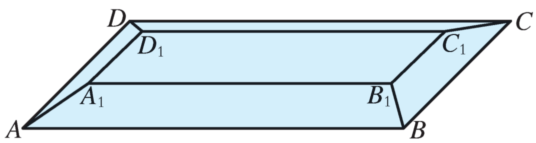


图 6-23

分析 这个多面体的所有顶点都在两个平行平面 AC 和 A_1C_1 上，像这样的多面体我们称为**拟柱体**（prismatoid）．拟柱体在这两个平行平面上的面称为底面，其余的面都叫侧面．拟柱体的侧面只能是三角形、梯形或平行四边形．相邻两个侧面的公共边称为拟柱体的侧棱．两底面之间的距离称为拟柱体的高．

拟柱体的体积公式 设拟柱体的上、下底面面积分别为 S' 和 S，中截面面积为 S_0，高为 h，体积为 V，则

$$V_{\text{拟柱体}}=\frac{1}{6}h(S'+S+4S_0)$$

注 中截面在上、下底面之间，与上、下底面平行且距离相等．

解 $S'=96\ \text{cm}^2$，$S=320\ \text{cm}^2$，

$$S_0=\frac{20+12}{2}\times\frac{16+8}{2}=192\ (\text{cm}^2).$$

$$\therefore\quad V=\frac{1}{6}\times2\times(96+320+4\times192)=\frac{1\,184}{3}\ (\text{cm}^3).$$

按这个定义，前面所学棱柱、棱锥、棱台都是特殊的拟柱体．除此以外，还有许多别的拟柱体．图 6-24 所画的都是拟柱体．

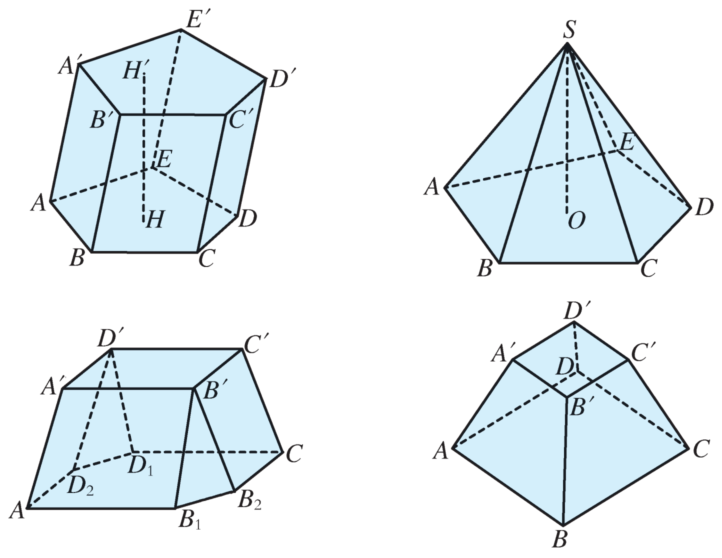


图 6-24

体积公式的关系如下：

$$V_{\text{拟柱体}}=\frac{h}{6}(S'+S+4S_0)$$

棱柱：$S'=S=S_0$ → $V_{\text{棱柱}}=Sh$

棱锥：$S'=0$，$S_0=\frac{S}{4}$ → $V_{\text{棱锥}}=\frac{1}{3}Sh$

棱台：$\sqrt{S_0}=\frac{\sqrt{S'}+\sqrt{S}}{2}$ → $V_{\text{棱台}}=\frac{1}{3}h(S'+S+\sqrt{S'S})$

对棱柱、棱锥，用它们各自的体积公式比较简单．对其余的拟柱体，不用去判断它是否为棱台，直接用拟柱体体积公式就行了．

圆柱的体积公式 设圆柱的底面半径为 r，高为 h，则其体积为

$$V_{\text{圆柱}}=\pi r^2h$$

圆锥的体积公式 设圆锥的底面半径为 r，高为 h，则其体积为

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

圆台的体积公式 设圆台上底半径为 r'，下底半径为 r，高为 h，体积为 V，则

$$V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$$

同样的，在圆台的体积公式中，令 $r'=0$，则得到圆锥的体积公式，令 $r'=r$，则得到圆柱的体积公式. 因此，可以说圆锥、圆柱都是特殊的圆台，它们的体积公式可以统一到圆台的体积公式之中.

球的体积公式 设球的半径为 r，则其体积为

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

以上所有这些体积公式在学了微积分之后都能得到证明. 现在同学们只要会用它们就行了.

例 4 有一座纪念碑，底座是一个长方体，长为 4 m，宽为3 m，高为 1 m；底座上面的碑体也是长方体，放在底座的正中，各面相应地与底座的各面平行，长为 1 m，宽为 0.5 m，高为 5 m. 求该座纪念碑的体积.

解 该座纪念碑的体积为

$$V=4\times3\times1+1\times0.5\times5=14.5(\text{m}^3).$$

例 5 如图 6-25，已知一个火箭的前面部分是一个圆锥，其高为 5 m，底面半径为 1 m，中间部分是一个圆柱，其高为 10 m，底面半径为 1 m，最后部分是一个圆台，其高为 1 m，上底面半径为 1 m，下底面半径为 1.2 m，求该火箭的体积.

解 该火箭的体积为

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\pi\times1^2\times5+\pi\times1^2\times10+\\&\quad\frac{1}{3}\pi\times1\times(1^2+1\times1.2+1.2^2)\\&=40.46(\text{m}^3).\end{aligned}$$

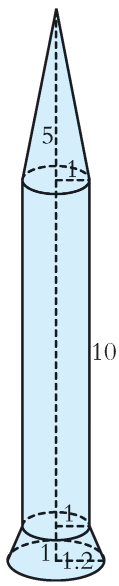


图 6-25

例 6 图 6-26 是一个奖杯的三视图，请你画出它的底座的直观图，并求出这个奖杯的体积.

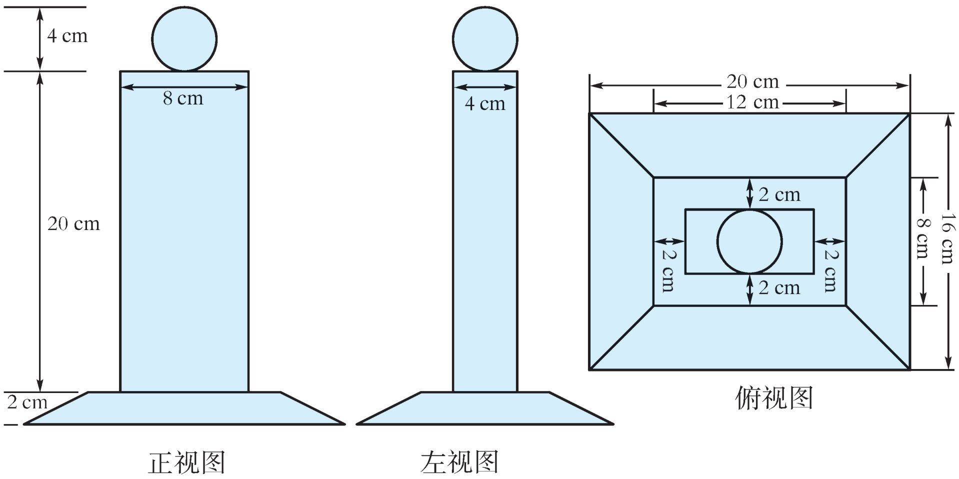


图 6-26

一个复杂的几何体分成几个部分单独计算后就不复杂了.

解 从这个奖杯的三视图可知，该奖杯是由三部分组成：顶端是一个直径为 4 cm 的球体，中间部分是一个高为 20 cm，底面边长为 8 cm和 4 cm 的长方体（特殊的棱柱），底座就是本节例 3 中的几何体，其体积已求出.

该奖杯的体积为

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\pi\times 2^3+4\times 8\times 20+\frac{1\ 184}{3}\\
&=\frac{32}{3}\pi+640+\frac{1\ 184}{3}\\
&=\frac{32\pi+3\ 104}{3}\\
&\approx 1\ 068.2(\mathrm{cm}^3).
\end{aligned}
$$

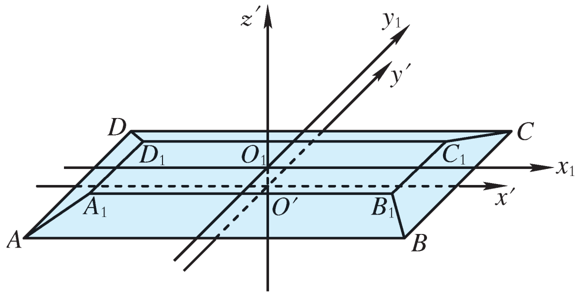
该奖杯底座的直观图画法如下：

（1）画轴. 画 x'轴，y'轴，z'轴，使$\angle x'O'y'=45^\circ$，$\angle x'O'z'=90^\circ$.

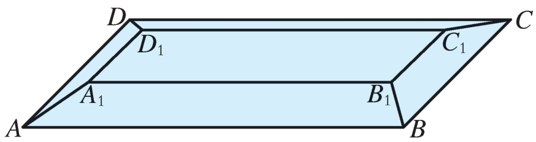
（2）以 O'为中心，按 x'轴，y'轴画底座拟柱体的下底面长方形的直观图 $ABCD$，在 z'轴上取线段 $O'O_1$ 等于底座拟柱体的高，过 O_1 画 O_1x_1，O_1y_1 分别平行于 x'轴，y'轴，再以 O_1 为中心，按O_1x_1，O_1y_1 画底座拟柱体的上底面长方形的直观图 $A_1B_1C_1D_1$.

（3）连结 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1，并加以整理，就得到底座拟柱体的直观图，如图 6-27（a）.

擦去辅助线，得到奖杯底座的直观图，如图 6-27（b）.



（a）



（b）

图 6-27

练 习

1. 在一块平地上，计划修建一条水渠，渠道长 1.5 km，渠道的横断面是梯形，梯形的两底分别是 1.8 m，0.8 m，高是 1.6 m，如果每个人每天挖 2 m^3，且必须在 30 天之内挖完，问至少要派多少人？
2. 一个螺帽是由一个底面边长为 2 cm，高为 1 cm 的正六棱柱中挖去一个直径为 2 cm的圆柱而构成的几何体，求该螺帽的体积.

习题 3

学而时习之

1. 一个球的表面积是 $144\pi\ \text{cm}^2$，求球的半径.

2. 一个圆柱的高是 8 cm，全面积是 $130\pi\ \text{cm}^2$，求它的底面半径.

3. 求例 6 中奖杯的表面积.

温故而知新

4. 一个棱台的高为 20 cm，体积为 1 720 cm^3，两底面对应边的比为5∶8，求这个棱台的两个底面积.

5. 圆柱的侧面展开图是一个边长为 a 的正方形，求它的体积.

6. 如果一个圆锥的高增加 20%，底面面积减少 10%，那么变化后的圆锥与原圆锥的体积比是多少？

7. 下雨时，用上口直径为 32 cm，底面直径为 24 cm，深为 35 cm 的水桶盛水，如果积水达到桶深的$\frac{1}{4}$处. 问降雨量是多少毫米？$\left(\text{降雨量}=\dfrac{\text{积水体积}}{\text{进水口面积}}\right)$

8. 由于生产的需要，打算将一个半径为 5 cm 的钢球重新铸造成一批半径为 1 cm 的小钢球，求这些小钢球的个数.

9*. 画出本节例 6 中奖杯的直观图.

6.2 空间的直线与平面

空间图形由点、线、面构成，研究空间的点、线、面的关系是研究立体几何的基础.

6.2.1 点、线、面的位置关系

前面我们已经初步了解了一些空间图形的性质．我们知道空间图形是由点、线、面构成，因此研究空间的点、线、面的关系是研究立体几何的基础．本节我们进一步研究组成空间图形的点、线、面的位置关系，为此，我们先介绍一些基本的常识和表示方法．

几何里的平面和直线一样都是无限延展的，我们常见的桌面、黑板面以及平静的水面等都是平面的局部形象．

我们显然不可能将一个无限延展的平面在纸上表示出来，只能用平面的一部分表示平面，最常用的是平行四边形．不过，我们仍然把它想象成是无限延展的．

平面一般用小写的希腊字母 α，β，γ，…表示，也可以用表示平面的平行四边形的字母表示，还可以用表示平面的平行四边形的对角顶点的字母表示．图 6-28 中的平面可表示为：平面 α，平面 $ABCD$ 或平面 AC．

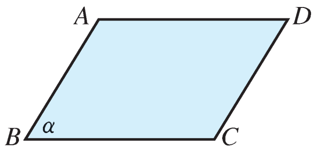


图 6-28

点在平面内或点在直线上，我们用“$\in$”表示．点不在平面内或点不在直线上，我们用“$\notin$”表示．直线在平面内我们用“$\subset$”表示．直线与直线相交，或直线与平面相交，以及平面与平面相交，我们都用“$\cap$”表示它们的公共部分．如点 P 在平面 α 内，记作 $P\in\alpha$；点 A 在直线 AB 上，记作 $A\in AB$；直线 AB 和平面 α 交于 C 点，记作 $AB\cap\alpha=C$；平面 α 与平面 β 交于直线 CD，记作 $\alpha\cap\beta=CD$；直线 a，b 相交于点 P，记作 $a\cap b=P$．（如图 6-29）

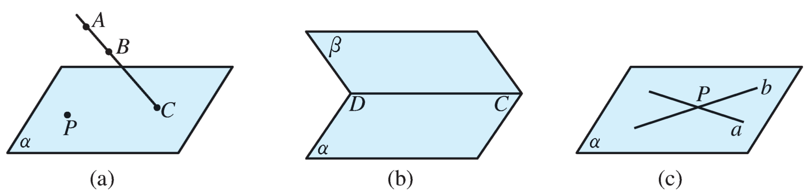


图 6-29

观察图6-30 中长方体 $A'B'C'D'$-$ABCD$ 的各条棱和各个面的相

互关系：

点 A，B 在面 $ABCD$ 内，而整条直线 AB 都在面 $ABCD$ 内；点 A，B 在面 $ABB'A'$ 内，而整条直线 AB 都在面 $ABB'A'$ 内．我们把它作为公理．

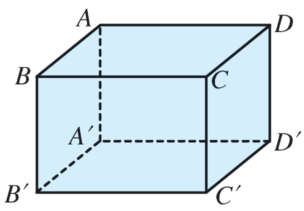


图 6-30

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在这个平面内．

我们在墙面上钉木条，往往要钉两个钉子就是这个道理．

我们再看：同时过 A，B，C 三点的平面有哪几个？同时过 A，B，B'三点的平面有哪几个？同时过 A，B，C 三点的平面只有面 $ABCD$ 一个，同时过 A，B，B'三点的平面也只有面 $ABB'A'$一个．这又是一个公理．

公理 2 过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面．

这个公理在实际生活中有广泛的应用，比如我们所用的照相机和摄像机的三角架就是根据这个原理设计的．我们所用的自行车，只用一只脚架也是这个道理．这个公理我们也往往简单地说成：“不共线三点确定一个平面．”

由这个公理，再结合初中所学的“两点确定一条直线”，很容易得到如下三个推论：

1．一条直线和直线外一点确定一个平面．

2．两条相交直线确定一个平面．

3．两条平行直线确定一个平面．

在平面几何中，两条直线的关系只有两种，两条直线要么相交，要么平行．这个结论在空间是否还正确呢？

例 1 观察图 6-30 的长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$中各条棱所在的直线，直线 AB 和直线 CC'是否相交？是否平行？

解 AB 与 CC'没有公共点，它们不相交．它们也不同在任何一个平面内，因此也不平行．

那么 AB 与 CC'之间是什么位置关系呢？

我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫作**异面直线**

(non-coplanar lines).

显然，两条异面直线既不平行，也不相交，比如例 1 中的直线 AB 与 CC' 就是异面直线.

这样，空间的两条直线的位置关系就有以下三种：

(1) **相交直线**——在同一个平面内，有且只有一个公共点；

(2) **平行直线**——在同一个平面内，没有公共点；

(3) **异面直线**——不同在任何一个平面内，没有公共点.

例 2 如图 6-31，已知 $a\subset\alpha$，$A\notin\alpha$，$B\in\alpha$，$B\notin a$.

求证：直线 AB 和 a 是异面直线.

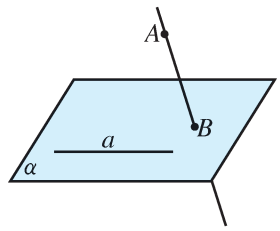


图 6-31

注意体会这种反证法.

证明 假设直线 AB 与 a 在同一个平面内，那么这个平面一定经过点 B 和直线 a.

$\because$ $B\notin a$，经过点 B 与直线 a 只能有一个平面 α，

$\therefore$ 直线 AB 与 a 应在平面 α 内.

$\therefore$ $A\in\alpha$，这与已知 $A\notin\alpha$ 矛盾.

$\therefore$ 直线 AB 和 a 是异面直线.

这个结论常用来判定两直线是异面直线.

这个例题说明：**与平面相交的直线与该平面内不过该交点的直线是异面直线.**

画异面直线时，可以画成如图 6-32 那样，以显示出它们不共面的特点.

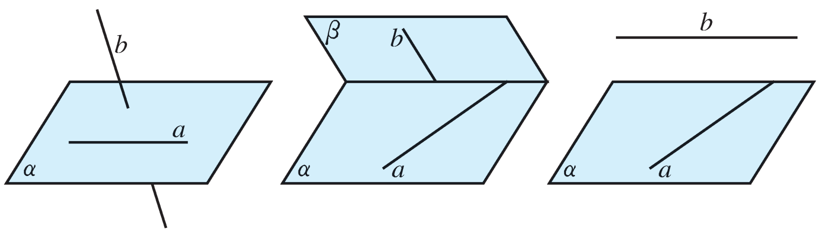


图 6-32

例 3 如图 6-33，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱所在的直线中，找出与棱 AA_1 所在直线成异面直线的所有直线.

解 我们先把图中已知和棱 AA_1 相交或平行的棱去掉. 剩下了棱 D_1C_1，B_1C_1，DC，BC.

我们先来看棱 BC 所在的直线，有 $AA_1 \subset$ 平面 AB_1，$B \in$ 平面 AB_1，$B \notin AA_1$，$C \notin$ 平面 AB_1，所以直线 AA_1 与 BC 是异面直线.

同理可得直线 B_1C_1，D_1C_1，DC 都和直线 AA_1 成异面直线.

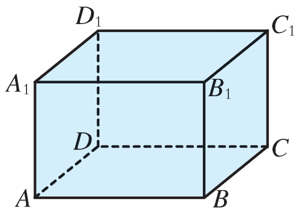


图 6-33

分别在两个平面内的两条直线一定是异面直线吗？比如，图 6-33 的长方体的两条棱 AA_1，CC_1 所在的直线是否是异面直线？

练习

1. 填表：

位置关系	是否共面	公共点情况
相交直线		
平行直线		
异面直线		

2. 图 6-27 中的直线 AA_1 在平面 AA_1B_1B 内，CC_1 在平面 CC_1B_1B 内，AA_1 与 CC_1 是异面直线吗？
3. 直线 a 和两条异面直线 b，c 都相交，画出每两条相交直线所确定的平面，并标上字母.

下面我们再来看直线和平面的位置关系.

我们观察教室的墙面和地面，它们的相交线在地面上，两墙面的相交线和地面只相交于一点，墙面和天花板的相交线和地面没有交点. 它反映出直线和平面之间存在着不同的位置关系.

如果一条直线和一个平面没有公共点，那么我们说**这条直线和这个平面平行.**

一条直线和一个平面的位置关系，有且只有以下三种：

（1）**直线在平面内**——有无数个公共点；

（2）**直线和平面相交**——有且只有一个公共点；

（3）**直线和平面平行**——没有公共点.

图 6-34 是表示这三种位置关系的图形. 一般地，直线 a 在平面 α 内时，应把直线 a 画在表示平面 α 的平行四边形内；直线 a 不在平面 α 内时，表示直线的线段要有一部分或全部画在表示平面 α 的平行四边形外.

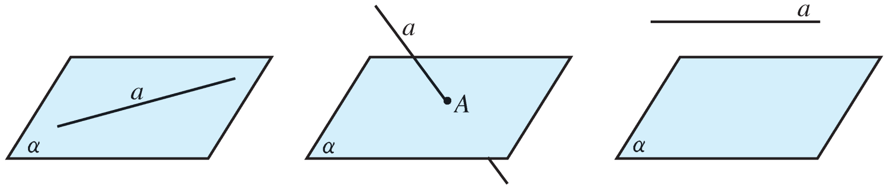


图 6-34

直线 a 与平面 α 相交于点 A，规定记作 $\alpha\cap a=A$；直线 a 与平面 α 平行，记作 $a /\!/ \alpha$；直线 a 在平面 α 内，记作 $a\subset\alpha$.

例 4 如图 6-35，指出长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，各个面所在的平面与棱 AA' 所在直线的位置关系.

解 $\because$ $A\in$ 平面 AB'，$A'\in$ 平面 AB'，

$\therefore$ $AA'\subset$ 平面 AB'.

同理 $AA'\subset$ 平面 AD'.

$\because$ $A\in$ 平面 AC，$A'\notin$ 平面 AC，

$\therefore$ $AA'\not\subset$ 平面 AC.

$\therefore$ $AA'\cap$ 平面 $AC=A$.

同理 $AA'\cap$ 平面 $A'C'=A'$.

还可以看出 $AA' /\!/$ 平面 BC'，$AA' /\!/$ 平面 DC'.

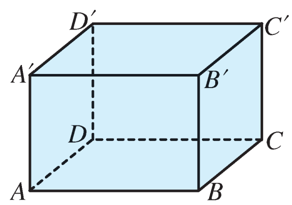


图 6-35

最后，我们把直线与平面的三种位置关系归纳如下：

<table>
<tr><th colspan="2">位置关系</th><th>公共点情况</th><th>判　　定</th><th colspan="2">记　　法</th></tr>
<tr><td colspan="2">直线在平面内</td><td>直线上所有的点都是公共点</td><td>有两个公共点</td><td colspan="2">$a\subset\alpha$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">直线不在平面内</td><td>平行</td><td>没有公共点</td><td>直线在平面外，且平行于平面内一条直线</td><td>$a /\!/ \alpha$</td><td rowspan="2">$a\not\subset\alpha$</td></tr>
<tr><td>相交</td><td>有且只有一个公共点</td><td>有且只有一个公共点</td><td>$a\cap\alpha=A$</td></tr>
</table>

练　习

1. 举出直线和平面的三种位置关系的实例.
2. 画两个相交平面，并在其中一个平面内画一条直线和另一个平面平行.

我们知道，在平面几何中有定理：“平行于同一条直线的两条直线平行.”这一定理在空间中是否仍然正确呢？

观察图 6-35 中长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的各条棱所在的直线. 其中哪些棱所在的直线与直线 AB 平行？它们是否两两相互平行？哪些棱所在的直线与直线 AD 平行，它们是否两两相互平行？哪些棱所在的直线与直线 AA' 平行，它们是否两两相互平行？

通过人们的大量观察，总结出：

公理 3　平行于同一条直线的两条直线平行.

我们已经知道了直线和平面的一些关系. 比如，公理 1 所说“如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在这个平面内”. 又如由公理 2 的推论所指出的：两条相交直线决定一个平面；两条平行直线决定一个平面. 也就是说，平面可以由它所包含的两条直线决定. 反过来，两个平面相交可以产生直线.

一般地，有结论：

公理 4　如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们的交集是一条过该点的直线.

问题探索

空间中两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角的大小有什么关系？

角的边是射线. 两条射线平行，它们的方向相同或相反.

因此应考虑三种不同的情况：

情况 1 两个角的两条边分别平行并且方向相同；

情况 2 两个角的两条边分别平行并且方向相反；

情况 3 两个角的两条边分别平行，其中一组对应边方向相同，另一组对应边方向相反.

对于平面上的两个角，我们知道在前两种情况下两个角相等，在情况 3 下两个角互补. 我们证明同样的结论在空间仍然成立.

例 5 空间中两个角的两条边分别对应平行并且方向相同，那么这两个角相等.

如图 6-36（a），已知$\angle BAC$和$\angle B'A'C'$的边$AB /\!/ A'B'$，$AC /\!/ A'C'$，并且方向相同.

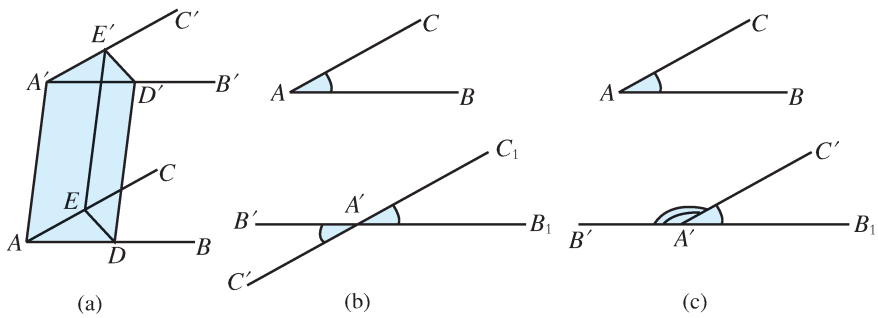


图 6-36

求证：$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

证明 在$\angle BAC$和$\angle B'A'C'$的两边上分别截取$AD=A'D'$，$AE=A'E'$. 连结AA'，DD'，EE'，ED，$E'D'$.

∵ $AD /\!/ A'D'$，$AD=A'D'$，

∴ $A'D'DA$是平行四边形.

∴ $AA' /\!/ DD'$，$AA'=DD'$.

又 ∵$AE /\!/ A'E'$，$AE=A'E'$，

∴ $AA'E'E$是平行四边形.

∴ $AA' /\!/ EE'$，$AA'=EE'$.

根据公理 4，得$DD' /\!/ EE'$，又可得$DD'=EE'$，

∴ $DD'E'E$是平行四边形.

∴ $ED=E'D'$.

∴ $\triangle ADE\cong\triangle A'D'E'$.

∴ $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

由例 5 的结论很容易推出其余情况下的结论：

如果空间两个角 $\angle BAC$，$\angle B'A'C'$ 的两条边分别对应平行并且方向相反，那么这两个角相等．如图 6-36(b).

如果空间两个角 $\angle BAC$，$\angle B'A'C'$ 的两条边分别对应平行，并且 AB 与 $A'B'$ 方向相反，AC 与 $A'C'$ 方向相同，那么这两个角互补．如图 6-36(c).

请同学们用例 5 的结论处理情况 2，情况 3.

一般地，有：

定理 1 空间中如果两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等或互补.

例 6 如图 6-37，已知 E，F，G，H 分别是空间四边形 $ABCD$ 四条边 AB，BC，CD，DA 的中点．求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

四个顶点不共面的四边形叫作空间四边形.

已经知道当 $ABCD$ 是同一平面中的四边形时，这个结论正确，这里处理的是四边形 $ABCD$ 不在同一个平面内的情况.

证明 连结 A 与 C，B 与 D.

∵ E，F 是 $\triangle ABC$ 的 AB，BC 边上的中点，

∴ $EF/\!/AC$.

同理 $HG/\!/AC$.

∴ $EF/\!/HG$.

同理 $EH/\!/FG$.

∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

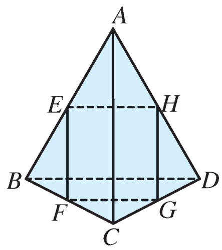


图 6-37

请同学们思考，如果本例加上 $AC=BD$，$EFGH$ 是什么四边形？

练 习

1. 如图 6-38，把一张长方形的纸对折两次，然后打开，说明为什么这些折痕是互相平行的？

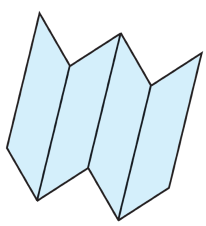


图 6-38

2. 如图 6-39，已知 AA'，BB'，CC'不共面，且 $AA' \parallel BB'$，$AA' = BB'$，$BB' \parallel CC'$，$BB' = CC'$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

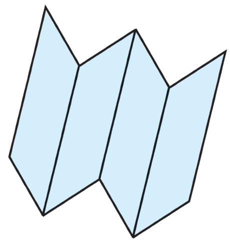


图 6-39

习题 4

学而时习之

1. 画两个相交平面，在这两个平面内各画一条直线，使它们成为

（1）平行直线；（2）相交直线；（3）异面直线.

2. 怎样检查一张桌子的四条腿的下端是否在同一平面内？

3. 如图 6-40，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$的所有棱所在的直线中，找出与棱 $B'C'$所在直线成异面直线的所有直线.

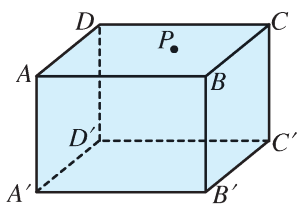


图 6-40

4. 一条直线和两条平行直线相交，这三条直线是否在同一个平面内？

5. 如图 6-40，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$的六个表面中，指出 AA'与哪些平面相交，与哪些平面平行以及 AA'在哪些平面内？

温故而知新

6. 如图 6-40，在长方体木块的 AC 面上有一点 P. 过 P 点画一条直线和棱 $B'C'$平行，说明画法和理由.

7. 如图 6-41，在长方体中，$AE = A_1E_1$，$AF = A_1F_1$. 求证：$EF \parallel E_1F_1$.

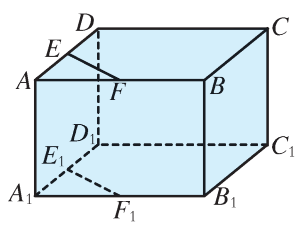


图 6-41

8. 已知$\triangle ABC$ 在平面 α 外，它的三条边所在直线分别交 α 于 P，Q，R 三点. 求证：P，Q，R 三点共线.

6.2.2 平行关系

一、直线与平面平行

前面我们已经知道空间直线和平面的关系有三种：直线在平面上，直线与平面相交，直线与平面平行．本节我们专门研究直线与平面的平行关系．

我们说直线 l 与平面 α 平行，记作 $l /\!/ \alpha$，是指直线 l 与平面 α 没有公共点．也就是说：l 与 α 的交集是空集 $\varnothing$．

$l /\!/ \alpha \Leftrightarrow l \cap \alpha = \varnothing$ **（直线与平面平行的定义）**

既然 $l /\!/ \alpha \Leftrightarrow l \cap \alpha = \varnothing$，此时对平面 α 内任何一条直线 m 当然也有 $l \cap m = \varnothing$，即 l 与 m 平行或异面．特别地，如果直线 m 与 l 在同一平面内，那么 m 就与 l 平行．

定理 2 一条直线与一个平面平行，则过该直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行．

已知：如图 6-42，$l /\!/ \alpha$，$l \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = m$．

求证：$l /\!/ m$．

证明 $\left.\begin{array}{l} l /\!/ \alpha \Leftrightarrow l \cap \alpha = \varnothing \\ m \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow l \cap m = \varnothing$．

l，m 没有公共点，又同在一个平面 β 内，故 $l /\!/ m$．

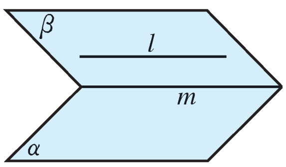


图 6-42

这个定理称为**直线与平面平行的性质定理**．

这个定理由“线面平行”（直线与平面平行）得出了关于“线线平行”（直线与直线平行）的结论．那么，怎样判定“线面平行”呢？能不能反过来由“线线平行”判定“线面平行”？

$\left.\begin{array}{l} l \cap \alpha = \varnothing \\ m \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$ $l \cap m = \varnothing$，无非是说：l 与 α 没有公共点，而 m 在 α 内，所以 l 与 m 没有公共点．同学们应当逐渐习惯用集合语言来描述数学的关系．

观察与思考

问题 已知直线 l 不在平面 α 内. 直线 l 应与平面 α 内的直线具有什么样的位置关系，才能断定直线 l 与平面 α 平行？

思考 假如直线 l 与平面 α 平行，我们可以过 l 作平面 β 与 α 相交，得到交线 m 与 l 平行. 这说明：

直线 l 与平面 α 平行$\Rightarrow$平面 α 内存在直线 $m /\!/ l$.

反过来，假如平面 α 内有一条直线 $m /\!/ l$，能否由此断定 $l /\!/ \alpha$？

观察 观察图 6-40 的长方体 $ABCD-A'B'C'D'$. 棱 AB 所在的直线 AB 平行底面 $A'B'C'D'$ 内的直线 $A'B'$，直线 AB 确实平行于平面 $A'B'C'D'$. 同样，BC，CD，DA 分别平行于平面 $A'B'C'D'$ 内的直线 $B'C'$，$C'D'$，$D'A'$，它们也都平行于平面 $A'B'C'D'$.

观察图 6-43 中由矩形 $OAA'O'$ 绕一边 OO' 旋转一周产生的圆柱体. 矩形中 OO' 的对边 AA' 不论旋转到什么位置 BB'，都称为圆柱的母线，它也始终都平行于 OO'. 只要 BB' 不在平面 $OAA'O'$ 内，就平行于平面 $OAA'O'$. 这是说：圆柱的母线平行于不过这条母线的轴截面.

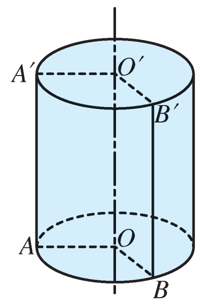


图 6-43

再思考 如果直线 l 平行于平面 α 内一条直线 m，l 能不能与 α 相交？

既然 $l /\!/ m$，过 l，m 就有唯一一个平面 β. 整条直线 l 都在平面 β 内. l 与 α 如果相交于某一点 P，交点 P 只能在 $\beta \cap \alpha = m$ 上. 也就是说 l 与 m 相交于 P，这与 $l /\!/ m$ 相矛盾.

可见 l 不能与 α 相交，只能与 α 平行.

一般地，有：

定理 3 平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与该平面平行.

利用这个定理，可以由“线线平行”判定“线面平行”. 我们称它为**直线与平面平行的判定定理**.

根据上述定理，画一条直线与已知平面平行，通常把表示直线的线段画在表示平面的平行四边形的外面，并且使它与平行四边形的一边平行或与平行四边形内的一条线段平行（图 6-44）.

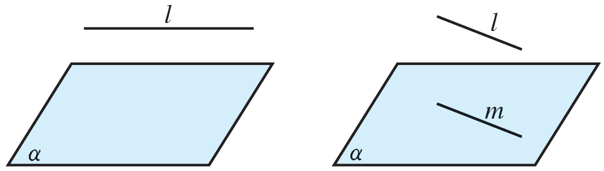


图 6-44

例 1 如图 6-45，已知空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，AD 的中点.

求证：$EF /\!/$ 平面 BCD.

证明 连结 BD. 在 $\triangle ABD$ 中，

∵ E，F 分别是 AB，AD 的中点，

∴ $EF /\!/ BD$.

又 $EF \not\subset$ 平面 BCD，$BD \subset$ 平面 BCD，

∴ $EF /\!/$ 平面 BCD.

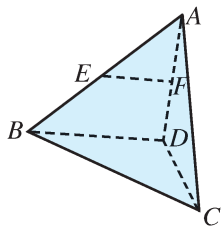


图 6-45

例 2 求证：如果过平面内一点的直线平行于与此平面平行的一条直线，那么这条直线在此平面内.

已知：如图 6-46，$l /\!/ \alpha$，$P \in \alpha$，$P \in m$，且 $m /\!/ l$.

求证：$m \subset \alpha$.

证明 设 l 与 P 确定的平面为 β，则 $m \subset \beta$.

设 $\alpha \cap \beta = m'$，则 $l /\!/ m'$.

又 $l /\!/ m$，$P \in m \cap m'$，

∴ m 与 m' 重合.

∴ $m \subset \alpha$.

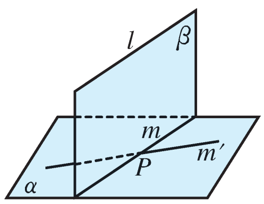


图 6-46

例 3 如图 6-47，有一块木料已知棱 BC 平行于面 $A'C'$，要经过木料表面 $A'B'C'D'$ 内的一点 P 和棱 BC 将木料锯开，应怎样画线？所画的线和面 AC 有什么关系？

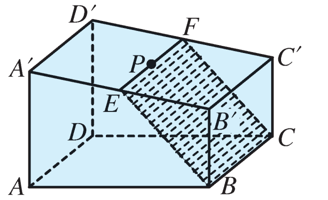


图 6-47

可见，在处理空间的线面之间的关系问题时，我们往往要尽量转化为一个平面内的问题来解决.

解 ∵ $BC /\!/$ 面 $A'C'$，面 BC' 经过 BC 且和面 $A'C'$ 交于 $B'C'$，

∴ $BC /\!/ B'C'$.

经过点 P，在面 $A'C'$ 上画线段 $EF /\!/ B'C'$，那么 $EF /\!/ BC$.

∴ $EF \subset$ 平面 BF，$BC \subset$ 平面 BF.

连结 BE 和 CF，则 BE，CF 和 EF 就是所要画的线.

∵ $EF /\!/ BC$，

∴ $EF /\!/$ 面 AC.

而 BE，CF 显然都和面 AC 相交.

练 习

1. 填空：如图 6-48，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各面所在的平面中，

（1）与直线 AB 平行的平面是________；

（2）与直线 AA_1 平行的平面是________；

（3）与直线 AD 平行的平面是________.

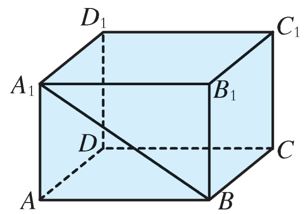


图 6-48

2. 下列命题是否正确，并说明理由：

（1）过平面外一点有无数条直线与这个平面平行；

（2）过直线外一点可以作无数个平面与已知直线平行.

3. 使一块矩形木板 $ABCD$ 的一边 AB 紧靠桌面并绕 AB 转动，当 AB 的对边 CD 转动到各个位置时，是不是都与桌面所在的平面平行？为什么？

4. 如图 6-49，已知 $AB /\!/$ 平面 α，$AC /\!/ BD$，且 AC，BD 与 α 分别相交于点 C，D. 求证：$AC=BD$.

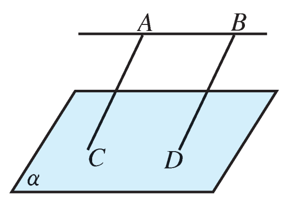


图 6-49

二、平面与平面平行

在 6.2.1 的公理 4 中，我们已经知道：如果两个不重合的平面有公共点，那么它们相交于一条直线.

如果两个平面没有公共点呢？很自然我们有：

定义 如果两个平面 α，β 没有公共点，就称这两个平面平行，记作 $\alpha /\!/ \beta$.

用集合语言描述，就是

$$\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing \text{（平面与平面平行的定义）}$$

我们将 $\alpha /\!/ \beta$ 读作“平面 α 平行于平面 β”. 画平行平面时，要使表示两个平面的平行四边形的对应边平行，如图 6-50.

既然两个平行平面没有公共点，那么，其中一个平面内的任何一条直线与另一个平面也没有公共点，这就得出了下面的结论.

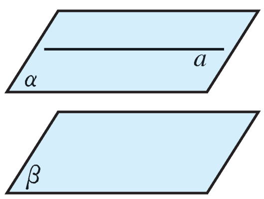


图 6-50

例 4 如果两个平面平行，则其中一个平面内的任一条直线与另一个平面平行.

已知：平面 $\alpha /\!/ \beta$，直线 $a \subset$ 平面 α.

求证：$a /\!/ \beta$.

证明 $\left.\begin{array}{l}\alpha /\!/ \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing \\ a \subset \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow a \cap \beta = \varnothing \Rightarrow a /\!/ \beta$.

你习惯了用集合语言叙述的这个推理过程吗？这其实是说的一个简单道理：α 与 β 没有公共点 $\Rightarrow \alpha$ 所含的 a 与 β 没有公共点.

既然两个平行平面没有公共点，那么，一个平面内的任一条直线与另一个平面内的任一条直线也没有公共点. 如果这两条直线还在同一个平面内，那么它们平行. 由此得到：

定理 4 （平面与平面平行的性质定理）两个平面平行，则任意一个平面与这两个平面相交所得的交线互相平行.

已知：如图 6-51，$\alpha /\!/ \beta$，$\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b$.

求证：$a /\!/ b$.

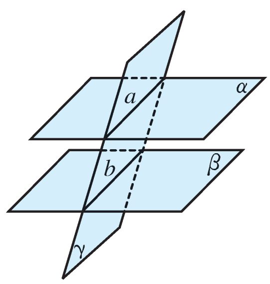


图 6-51

这个定理又实现了由“面面平行”到“线线平行”的转化.

如果只有 $a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，$\alpha /\!/ \beta$ 的条件，$a /\!/ b$ 一定成立吗？

证明： $\left.\begin{array}{l}\alpha /\!/ \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta=\varnothing \\ a \subset \alpha \text{ 且 } b \subset \beta\end{array}\right\} \Rightarrow a \cap b=\varnothing$.

a，b 没有公共点，又在同一平面 γ 内，故 $a /\!/ b$.

观察与思考

我们检测桌面是否水平时，常利用气泡水平仪. 将气泡水平仪放在桌面上，若气泡在中间，则再将气泡水平仪变化放置方向，若气泡还在中间，则说明桌面是水平的. 如图 6-52.

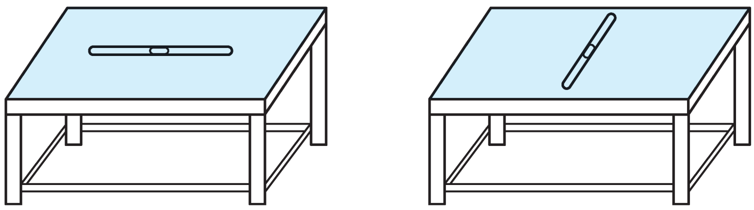


图 6-52

实际上，建筑工人检测某个面是否水平时大都采用这种方法. 当然，随着现代科技的发展，现在往往用水准仪代替气泡水平仪，但不管用什么，都必须交叉检测两个方向，其本质完全一样.

同样观察长方体（如图 6-40）可以看到：底面 $ABCD$ 内两条棱 AB，AD 所在的直线相交并且都与另一底面 $A'B'C'D'$ 平行，底面 $ABCD$ 确实平行于 $A'B'C'D'$；侧面 $ADD'A'$ 内的两条相交直线 AA'，AD 平行于另一侧面 $BCC'B'$，侧面 $ADD'A' /\!/$ 侧面 $BCC'B'$.

一般地，设平面 α 内有两条相交直线 a，b，且都与平面 β 平行，$a \cap b=P$，如图 6-53. 假如平面 α 与 β 不平行而相交于一条直线 c. 那么，根据直线与平面平行的性质定理，a，b 都应当与这条交线 c 平行. 但在同一平面 α 内过一点 P 不可能有两条不同的直线与 c 平行. 这一矛盾说明平面 α 与 β 不可能相交，只能平行.

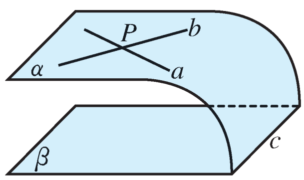


图 6-53

实际上，我们有：

定理 5 （平面与平面平行的判定定理）一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行.

例 5 求证：夹在两个平行平面间的两条平行线段相等.

已知：如图 6-54，平面 α∥平面 β，AB 和 CD 为夹在 α，β 间的平行线段.

求证：$AB=DC$.

证明 ∵ $AB \parallel DC$，

∴ AB 和 DC 确定平面 AC.

又∵ 直线 AD，BC 分别是平面 AC 与平面 α，β 的交线，

∴ $AD \parallel BC$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

∴ $AB=CD$.

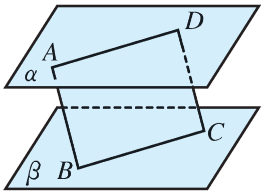


图 6-54

例 6 在图 6-55 的几何体中，三个侧面 AA_1B_1B，BB_1C_1C，CC_1A_1A 都是平行四边形.

求证：面 ABC∥面 $A_1B_1C_1$.

证明 AA_1B_1B 是平行四边形 $\Rightarrow A_1B_1 \parallel AB$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow A_1B_1 \parallel \text{面 } ABC \\ \text{同理 } B_1C_1 \parallel \text{面 } ABC \end{array}\right\} \Rightarrow \text{面 } A_1B_1C_1 \parallel \text{面 } ABC.$$

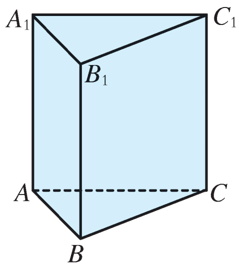


图 6-55

这个定理由线面平行得到了面面平行，又是一次很好的转化.

定理 5 中把“两条相交直线”改为“两条直线”还成立吗？为什么？

这说明侧面都是平行四边形的几何体是棱柱.

练 习

1. 下面的说法正确吗？

（1）如果一个平面内的两条直线分别平行于另一个平面，那么这两个平面平行；

（2）在两个平行平面中，对于其中一个平面内的一条直线，在另一个平面内只有一条直线与这条直线平行；

（3）平行于同一平面的两平面平行.

2. 如图 6-56，已知平面 α∥平面 β，点 P 是平面 α，β 外一点，且直线 PB，PD 分别与 α，β 相交于点 A，B 与点 C，D.

（1）求证：$AC /\!/ BD$；

（2）如果 $PA=4$ cm，$AB=5$ cm，$PC=3$ cm，求 PD 的长.

3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求证：面 $A_1BD /\!/$ 面 CB_1D_1.

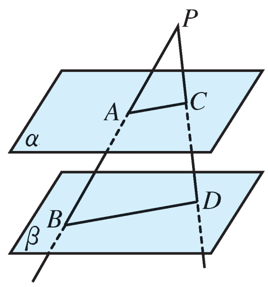


图 6-56

习题 5

学而时习之

1. 判断下列命题的真假：

（1）如果一条直线和另一条直线平行，则它和经过另一条直线的任何平面平行；

（2）如果一条直线和一个平面平行，则它和这个平面内的任何直线平行；

（3）平行于同一平面的两条直线互相平行.

2. 如图 6-57，直线 AB 平行于平面 α，经过 AB 的一组平面和平面 α 相交.

求证：它们的交线 $a, b, c, \cdots$ 是一组平行线.

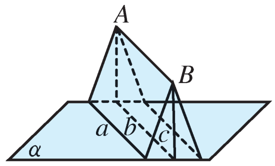


图 6-57

3. 如图 6-58，已知平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta=l$，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，$a /\!/ b$，求证：$a /\!/ l$，$b /\!/ l$.

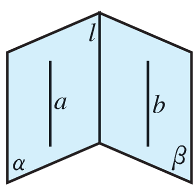


图 6-58

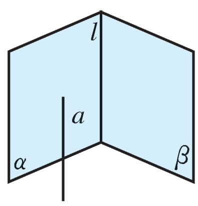


图 6-59

4. 如图 6-59，已知平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta=l$，$a /\!/ \alpha$，$a /\!/ \beta$，求证：$a /\!/ l$.

5. 求证：经过两条异面直线中的一条，有一个平面与另一条直线平行.

温故而知新

6. 已知平面 α∥平面 β，直线 a∥α，且 $a\not\subset\beta$. 求证：a∥β.

7. 如图 6-60，已知平面 α∥平面 β，点 P 是 α，β 外一点，自点 P 引三条不共面的射线 PA，PB，PC 与平面 α 分别相交于点 A，B，C，与平面 β 分别相交于点 A'，B'，C'. 求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

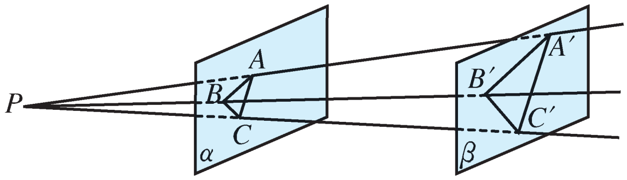


图 6-60

8. 如图 6-60，从平面 ABC 外一点 P，引射线 PA，PB，PC，在它们上面分别取点 A'，B'，C'，使$\dfrac{PA}{PA'}=\dfrac{PB}{PB'}=\dfrac{PC}{PC'}$. 求证：平面 ABC∥平面 $A'B'C'$.

9. 在三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，D，E，F 分别是棱 AA_1，A_1B_1，A_1C_1 的中点. 求证：平面 DEF∥平面 AB_1C_1.

6.2.3 垂直关系

一、直线与平面的垂直

直线与平面的垂直关系是生活中经常遇到的. 比如在水平地面上竖起电线杆，就要求它与地面垂直而不能倾斜. 房屋内相邻两面墙相交所成的墙缝应当与地面和天花板垂直而不能倾斜. 长方体的每一条棱都与两个面垂直，比如在图 6-30 的长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，竖直方向的棱 AA' 与面 $ABCD$ 和面 $A'B'C'D'$ 都垂直，放置在正对我们的方向的棱 AB 与面$ADD'A'$和面 $BCC'B'$ 都垂直，等等.

怎样把直线与平面的垂直用数学语言严格地叙述出来呢？

定义 如果一条直线与一个平面相交，并且垂直于这个平面内所有的直线，就称这条直线与这个平面**垂直**（perpendicular）．这条直线叫作这个平面的**垂线**（perpendicular line），这个平面叫作这条直线的**垂面**（perpendicular plane），它们的交点叫作**垂足**（foot of a perpendicular）.

在平面几何里我们就知道：如果两条直线 b，c 平行，直线 $a\perp b$，那么 $a\perp c$．这个结论在空间中也正确．而且我们也允许 a 与 b，c 是异面直线的情况．根据这个道理，我们这样来定义异面直线的垂直：

定义 设 a，b 是异面直线，过 a 上任意一点 A 作 $c\parallel b$，如果 $a\perp c$，就称 $a\perp b$.

如图 6-61，设直线 a 与平面 α 相交于点 A，并且垂直于平面 α 内

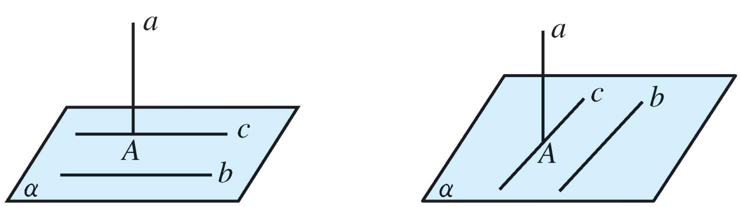


图 6-61

过点 A 的所有的直线．对于平面 α 内任意一条不过 A 点的直线 b，过点 A 在平面 α 内作 $c\parallel b$，则 $a\perp c$，从而 $a\perp b$．可见，只要 a 垂直于平面 α 内过交点 A 的所有的直线，它就垂直于平面 α 内所有的直线.

定理 6 （直线与平面垂直的判定定理）如果一条直线垂直于一个平面内的两条相交直线，那么这条直线就与这个平面垂直.

这里又由线线垂直得到了线面垂直．看来转化的思想确实十分有用.

直线 l 与平面 α 垂直，记作 $l\perp\alpha$.

画直线与平面垂直时，通常把直线画成与表示平面的平行四边形的一边垂直，如图 6-62.

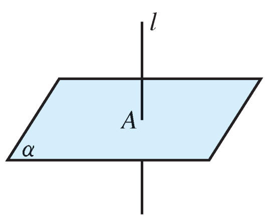


图 6-62

例 1 过一点和已知平面垂直的直线只有一条.

已知：平面 α 和一点 P.

求证：过点 P 与 α 垂直的直线只有一条.

证明 不论点 P 在 α 外或 α 内（如图 6-63），设直线 $PA\perp\alpha$，垂

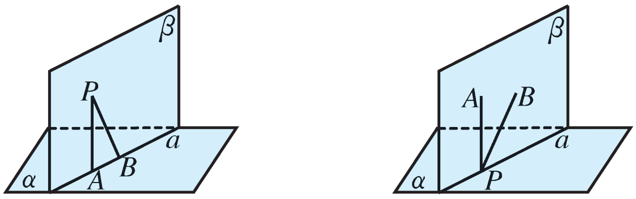


图 6-63

足为 A（或 P）．如果另有一条直线 $PB\perp\alpha$，设 PA，PB 确定的平面为 β，且 $\alpha\cap\beta=a$，于是在平面 β 内过点 P 有两条直线 PA，PB 垂直于 a，这是不可能的．所以过点 P 与 α 垂直的直线只有一条．

过一点有且只有一条直线和一个平面垂直，同样，过一点有且只有一个平面和一条直线垂直．

练习

1．拿一张矩形的纸对折后略为展开，竖立在桌面上，说明折痕为什么和桌面垂直．

2．一条直线垂直于一个平面内的两条平行直线，这条直线垂直于这个平面吗？为什么？

3．过一定点有多少个平面和一条直线垂直？

例 2　如图 6-64，有一根旗杆 AB 高 8 m，它的顶端 A 挂一条长 10 m 的绳子，拉紧绳子并把它的下端放在地面上的 C 点或 D 点（C，D 和旗杆脚 B 不在同一条直线上）．如果 C，D 这两点和旗杆脚 B 的距离都是 6 m，那么旗杆就和地面垂直．为什么？

解　在△ABC 和△ABD 中，

∵　$AB=8$ m，$BC=BD=6$ m，

$AC=AD=10$ m，

∴　$AB^2+BC^2=6^2+8^2=10^2=AC^2$，

$AB^2+BD^2=6^2+8^2=10^2=AD^2$．

∴　$\angle ABC=\angle ABD=90°$．

即　$AB\perp BC$，$AB\perp BD$．

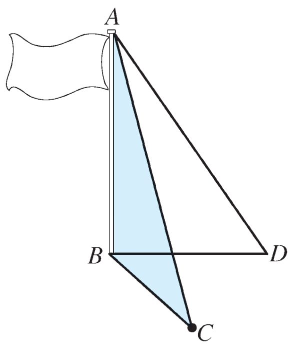


图 6-64

又知 B，C，D 三点不共线，

∴　$AB\perp$平面 BCD.

即旗杆和地面垂直.

根据直线与平面垂直的判定定理，容易得出：

如果两条平行线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面(如图 6-65).(请同学们自己证明一下.)

这个结论又引起我们思考：垂直于同一个平面的两条直线是否平行呢?

我们有如下关于直线与平面垂直的性质定理.

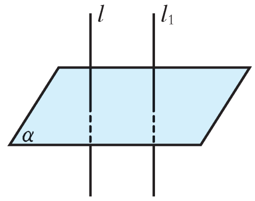


图 6-65

定理 7　垂直于同一个平面的两条直线平行.

已知：$a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$.

求证：$a/\!/b$.

证明　如图 6-66，假定直线 b 与 a 不平行. 设 $b\cap\alpha=O$，b'是经过点 O 与直线 a 平行的直线，平面 β 经过直线 b 与 b'，$\alpha\cap\beta=c$.

∵　$a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，

∴　$a\perp c$，$b\perp c$.

又∵　$b'/\!/a$，

∴　$b'\perp c$.

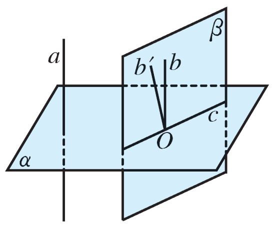


图 6-66

这样，在平面 β 内，经过直线 c 上同一点 O 就有两条直线 b，b'与 c 垂直，这是不可能的.

∴　$b/\!/a$.

本例又是用反证法证明的，你知道如何用反证法了吗?

练习

1. 有一根垂直于地面的旗杆 AB 高 8 m，从它的顶端 A 挂一条长度大于 8 m 的细绳，拉紧绳子并把它的下端固定于地面的 C 点，求这条绳子的中点 D 到地面的距离.
2. 已知直线 $a/\!/$平面 α，点 A，B 是 a 上任意两点. 求证：A，B 两点到平面 α 的距离相等.

数学实验

直线和平面的垂直关系

取两张同样大小的长方形硬纸板 $ABB'A'$，$CDD'C'$，如图 6-67（a）、（b）. 分别取 AB，$A'B'$，CD，$C'D'$的中点 M，M'，N，N'. 连结 MM'并取它的中点 E，连结 NN'并取它的中点 F.

将硬纸板 $ABB'A'$从 M 到 E 剪一条缝，硬纸板 $CDD'C'$从 N' 到 F 剪一条缝.

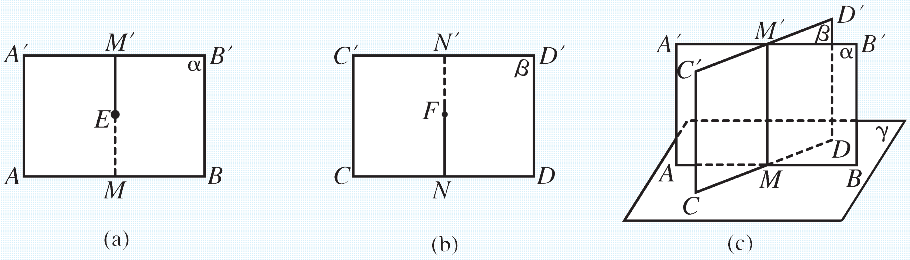


图 6-67

将硬纸板 $CDD'C'$的缝 $N'F$ 与硬纸板 $ABB'A'$的缝 ME 相互插入，使 NF 与 ME 重合，$M'E$ 与 $N'F$ 重合，从而 MM'与 NN'重合，成为两块硬纸板的交线. 将这样交叉插入的两块硬纸板放在水平的桌面 γ 上，使相交直线段 AB，CD 紧贴在桌面上，如图 6-67（c）.

由纸板的制作，知道 $MM'\perp AB$，且 $MM'\perp CD$. 而 AB，CD 是平面 γ 内两条相交直线，因此直线 MM'垂直于平面 γ 内两条相交直线 AB，CD.

观察现象 1：直线 MM'被完全固定在垂直于桌面的方向上，不能倾斜.

这说明：在空间中，过平面 γ 内一点 M 并且同时与平面内两条相交直线 AB，CD 垂直的直线 MM'有且仅有一条.

用手将硬纸板 $ABB'A'$ 固定从而 MM' 固定. 将硬纸板 $CDD'C'$ 绕 MM' 旋转.

观察现象 2：不论底边 CD 旋转到什么位置，它始终在平面 γ 内. 实际上，当 CD 从与 AB 重合的位置开始旋转 $180°$ 时，硬纸板 $CDD'C'$ 旋转形成一个圆柱，CD 旋转而成的就是圆柱的下底面，下底面所在的平面就是平面 γ.

这说明：如果直线 MM' 垂直于平面 γ 内两条相交直线 AB，CD，那么它就垂直于平面 γ 内过 AB，CD 交点 M 的所有的直线. 在我们的直观感觉中，认为这样的直线 MM' 垂直于平面 γ.

在 6.1.1 节讲圆柱时，我们将矩形 $OAA'O'$ 绕它的一边 OO' 旋转一周得到圆柱（如图 6-68）. 与轴 OO' 垂直的边 OA，$O'A'$ 旋转而成的分别是下底面和上底面，这说明 OO' 垂直于两底面中分别过 O，O' 的所有直线.

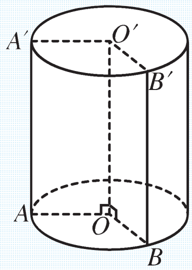


图 6-68

将硬纸板 $CDD'C'$ 从 $ABB'A'$ 中抽出，让硬纸板 $ABB'A'$ 独自立在桌面上使直线 AB 在平面 γ 内. 将手放开，硬纸板 $ABB'A'$ 能够稳立在桌面上不倾倒吗？MM' 仍然能够固定在一个方向而不倾斜吗？

观察现象 3：硬纸板 $ABB'A'$ 不能独自稳定地立在桌面 γ 上，而是要向一旁倾斜倒向桌面，从而直线 MM' 倾斜倒向桌面.

直线 MM' 在倾倒过程中仍然垂直于平面 γ 内一条直线 AB. 但垂直于平面 α 内一条直线并不能使 MM' 的位置确定下来. 而且，在倾斜之后，MM' 除了与 AB 垂直外与平面内过 M 的其余直线都不垂直，当然就认为它与平面 α 不垂直.

二、平面与平面垂直

平面与平面垂直的例子很多：长方体的任何两个相邻的面都垂直. 房间的墙与地板和天花板都垂直. 你还能举出些什么垂直的实例?

只要能使房间的竖着的墙缝垂直于地板，那么经过这个墙缝的两面墙都垂直于地板. 建筑工人在砌墙时，常用一端系有铅锤的线，来检查所砌的墙面是否与水平平面垂直(如图 6-69). 系有铅锤的线是垂直于水平平面的. 如果系有铅锤的线紧贴墙面，就说明墙面垂直于水平平面.

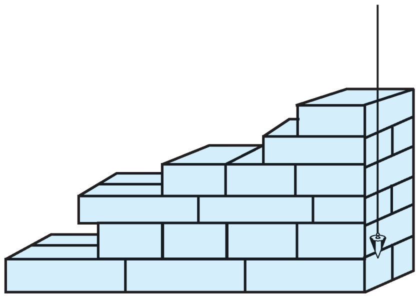


图 6-69

由大量实例可以得出：

若两个平面垂直，那么，在一个平面内存在一条直线与另一个平面垂直. 反之亦然. 因此我们有如下定理：

定理 8 （两个平面垂直的判定定理）如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面垂直.

又是由线面垂直得到面面垂直，还是在转化.

我们还有如下关于两个平面垂直的性质定理：

定理 9 两个平面垂直，则其中一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直.

已知：如图 6-70，设平面 α 和 β 垂直，它们交于直线 CD，平面 α 内的直线 AB 垂直 CD 于 B.

求证：$AB\perp\beta$.

证明 ∵ $\alpha\perp\beta$,

∴ 存在一直线 b, $b\subset\alpha$, $b\perp\beta$.

∴ $b\perp CD$.

∵ $AB\subset\alpha$，$AB\perp CD$,

∴ $AB/\!/b$.

∴ $AB\perp\beta$.

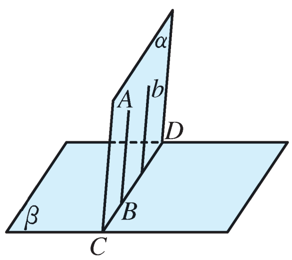


图 6-70

例 3 如果两个平面互相垂直，那么经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线在第一个平面内.

已知：$\alpha \perp \beta$，$P \in \alpha$，$P \in a$，$a \perp \beta$.

求证：$a \subset \alpha$.

证明 如图 6-71，假设 $a \not\subset \alpha$，设 $\alpha \cap \beta = c$，过点 P 在 α 内作直线 $b \perp c$.

又是用反证法.

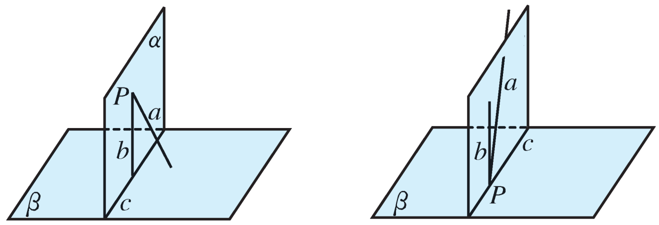


图 6-71

根据定理 9 可知 $b \perp \beta$，已知 $a \perp \beta$，$a \cap b = P$，这与经过一点只能有一条直线与平面 β 垂直相矛盾，所以 $a \not\subset \alpha$ 不成立，

即 $a \subset \alpha$.

例 4 如图 6-72，在四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，四个侧面都是矩形. 求证：面 $BB'C'C \perp$ 面 $ABCD$.

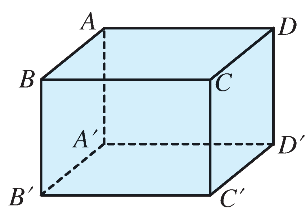


图 6-72

这说明侧面是矩形的棱柱是直棱柱，直棱柱的侧面都垂直于底面.

证明 $\left.\begin{array}{l} BB'C'C \text{ 是矩形} \Rightarrow CC' \perp BC \\ CC'D'D \text{ 是矩形} \Rightarrow CC' \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow$

$CC' \perp$ 面 $ABCD \Rightarrow$ 面 $BB'C'C \perp$ 面 $ABCD$.

练 习

1. 教室门在打开的过程中，它与地板面有怎样的位置关系？为什么？
2. 求证：如果一个平面与另一个平面的平行线垂直，那么这两个平面互相垂直.
3. 垂直于同一个平面的两个平面平行吗？说明你的理由.

习题 6

学而时习之

1. 如果三条共点直线两两垂直，那么，其中一条直线垂直于另两条直线所确定的平面.

2. 已知一条直线和一个平面平行，求证：这条直线和这个平面的垂线垂直.

3. 如图 6-73，已知 $PO \perp \alpha$ 于 O，PA 交 α 于 A，直线 $a \subset \alpha$，$OA \perp a$. 求证：$PA \perp a$.

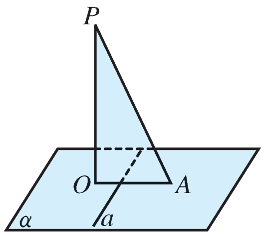


图 6-73

4. 已知两个平面相交，过一点分别引两个平面的垂线，求证：分别过这两条垂线上的一点（至少有一个点不是这两条垂线的交点）的直线和两个平面的交线垂直.

5. 已知在 Rt$\triangle ABC$ 外一点 P，$PA=PB=PC$，D 是斜边 AB 的中点. 求证：$PD \perp$ 平面 ABC.

温故而知新

6. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G 分别是 AB，BC，AA_1 的中点. 求证：$B_1D \perp$ 平面 EFG.

7. 求证：如果三条共点直线两两互相垂直，那么它们中每两条直线分别确定的三个平面也两两互相垂直.

8. 如果平面 α 和 β 都垂直于平面 γ，且 α 和 β 相交于一条直线 a，则 $a \perp \gamma$.

9. 求证：如果平面 α 和不在这个平面内的直线 a 都垂直于平面 β，那么 $a /\!/ \alpha$.

10. 已知 $ABCD$ 是正方形，$PA \perp$ 平面 $ABCD$，$BE \perp PC$，E 为垂足.

    求证：(1) $PC \perp BD$；　　(2) 平面 $BDE \perp$ 平面 PBC.

11*. 三个平面两两相交，试讨论三条交线的位置关系.

数学建模

半平面绕轴的转动

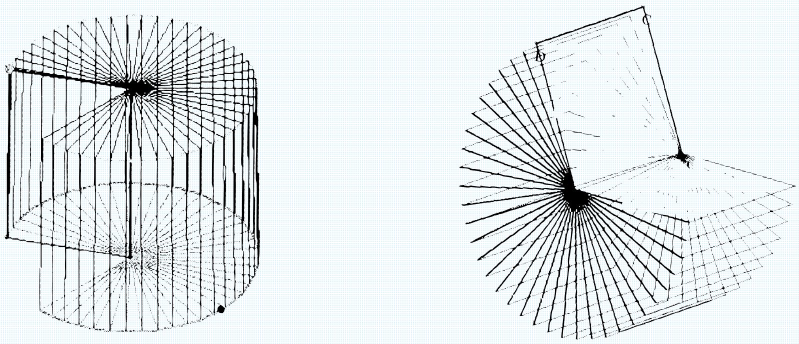


图 6-74

在 6.1.1 节中我们将矩形 $OAA'O'$ 绕一边 OO' 旋转一周得到了圆柱，如图 6-75（a）.

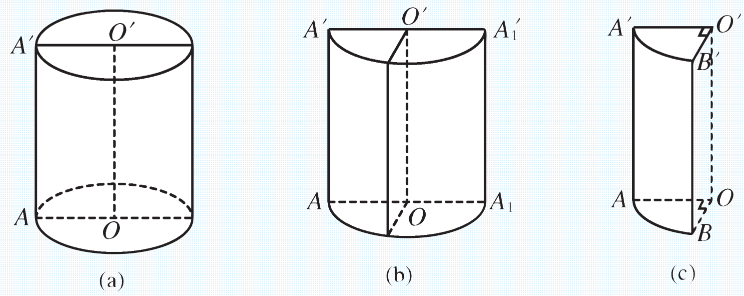


图 6-75

旋转过程中，矩形 $OAA'O'$ 中与转轴垂直的一边 OA 旋转一周产生下底面圆 O，另一边 $O'A'$ 旋转一周产生上底面圆 O'，与 OO' 平行的边 AA' 旋转一周产生圆柱的侧面.

什么叫作旋转一周？就是矩形经过旋转后第一次回到了原来的位置，而旋转过程中折线 $OAA'O'$ 所产生的面已经围成了一个封闭几何体，就是圆柱.

如果旋转还不到一周呢？比如说只有半周，如图 6-75（b），从 $OAA'O'$ 旋转到 $OA_1A_1'O'$，产生半个圆柱. 或者旋转 $\frac{1}{4}$ 周，从 $OAA'O'$ 旋转到 $OBB'O'$，产生圆柱的 $\frac{1}{4}$，如图 6-75（c）.

在平面上，一条射线绕端点的转动产生角，可以用“周”的$\frac{1}{360}$即1°来度量，转一周产生周角为360°，转半周产生平角为180°，转$\frac{1}{4}$周产生直角为90°，此时角的两边称为垂直.

同样的道理，矩形$OAA'O'$在空间中绕轴OO'的转动也可以用“周”的$\frac{1}{360}$来度量，同样将$\frac{1}{360}$周称为1°. 转动1周为360°（如图6-75（a）），转动半周为180°（如图6-75（b）），转动$\frac{1}{4}$周为90°（如图6-75（c）). 同样可以称**矩形$OAA'O'$所在的平面与它转动90°之后的位置$OBB'O'$所在的平面垂直.**

在平面上，我们将线段OA绕端点O的转动想象成从O向A无限延长的射线OA的转动，转动生成的图形称为角. 在空间，我们类似地将矩形$OAA'O'$绕轴OO'的转动想象成将矩形$OAA'O'$所在的平面用直线OO'分成两半，其中矩形$OAA'O'$所在的这一半（称为半平面$OAA'O'$）绕直线OO'的转动，转动所生成的图形称为**二面角**$OAA'O'-OO'-OBB'O'$. 其中转动前后半平面的位置$OAA'O'$，$OBB'O'$分别称为二面角的面，转轴OO'称为二面角的棱. 同样可以用“$\frac{1}{360}$周$=1^\circ$”去度量二面角. 比如图6-75（c）中的二面角$OAA'O'-OO'-OBB'O'$就是90°，称为**直二面角**，此时称它的两个面$\alpha=OAA'O'$与$\beta=OBB'O'$垂直（既称半平面α，β垂直，也称它们所在的平面垂直）.

注意，矩形$OAA'O'$在空间中绕轴OO'转动时所成的二面角是多少度，射线OA绕O转动所成的角就是多少度. 因此，也可以用OA转动时在平面上所生成的角来度量半平面$OAA'O'$转动所成的二面角，称为这个**二面角的平面角**. 比如在图6-75（c）中$\angle AOB$就是二面角$OAA'O'-OO'-OBB'O'$的平面角. 同样也可以用与转轴垂直的另一条射线$O'A'$在上底面内转动所成的角$\angle A'O'B'$作为这个二面角的平面角.

数学实验

正四棱锥的截面

使用软件“Z＋Z”智能教育平台《立体几何》，可以直接进行立体几何作图，还能测量空间的距离和角度．

本实验的任务是画一个正四棱锥和它被各种位置的平面所截的截面图．通过作图和测量，探讨截面可能是哪种图形．例如，会不会是正三角形、正方形、正五边形、正六边形？

下图是软件界面的菜单和图标：

执行菜单命令“作图｜棱锥｜正四棱锥”，作出一个底为 $ABCD$，顶点为 F 的正四棱锥．

它真是一个正四棱锥吗？我们可以测量它的棱长和有关的角度来进行检验．例如，选择 A，B 两点，执行菜单命令“测量｜距离｜两点的距离”，屏幕上就会显示出测量的数据．顺次选择 A，B，C 三点，执行菜单命令“测量｜角｜角的值”，屏幕上就会显示出 $\angle ABC$ 的度数．

测量哪些几何量，才能确定它是正四棱锥呢？

现在作一个平面来截正四棱锥．

不共线的三点确定一个平面，因此可以在四棱锥的三条棱上取点．执行菜单命令“作图｜自由点｜自由点”，或单击作点图标，鼠标的光标变成了握笔的手．移动光标使笔尖接近棱 AB，棱 AB 变色时单击左键，就作出了棱 AB 上的一点 G．继续操作，在棱 AD，BF 上分别作点 H，I．最后单击选择图标，退出作点状态．

顺次选择棱 DF 和新作的三点 G，H，I（选择两个或更多对象时，要按着 Ctrl 键），执行菜单命令“作图｜结束点｜直线和平面的交点”，便作出了平面 GHI 和直线 DF 的交点 J. 类似地，作出平面 GHI 和直线 CF 的交点 K.

顺次选择 G，H，J，K，I 五点，执行菜单命令“作图｜特殊图形｜多边形”，作出截面多边形. 选择此多边形单击右键，在打开的对话框里单击“属性”，可在属性对话框里将多边形填色.

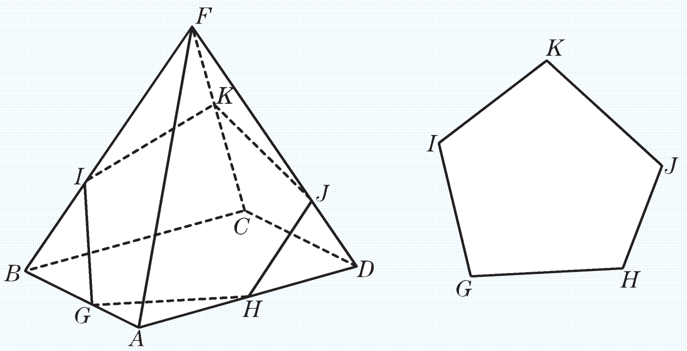


图 6-76

测量截面的边长和角度，并判断截面多边形是否是正五边形. 拖动三点 G，H，I，能否得到正五边形?

如果不成功，可以拖动点 F 调整锥高，探索哪种正四棱锥能截出正五边形.

若想看到截面的样子，可以顺次选择 G，H，J，K，I 五点，执行菜单命令“作图｜克隆平面多边形到投影平面”，得到 5 个克隆点，再把这 5 个点拖到适当的位置，作成多边形并填色，如图 6-76.

类似地，你可以作出其他多面体，研究其截面的性质.

小结与复习

一、指导思想

从对空间几何体的整体观察入手，认识空间图形．了解一些简单几何体的表面积和体积的计算方法．以长方体为载体，直观认识和理解空间点、线、面的位置关系．能用数学语言表述有关平行和垂直关系性质的一些结论，结合简单几何体加深理解，并对某些结论进行论证．

通过这一过程培养和发展空间想象能力、推理论证能力、运用图形语言进行交流的能力以及几何直观能力．

在研究空间图形性质的时候，适当转化为平面图形的相应性质，有助于加深理解和解决问题．

二、内容提要

本章主要内容是关于立体图形的一些基础知识．这些内容可分为两大部分：第一部分是利用实物模型、计算机软件观察空间图形，认识柱、锥、台、球及简单组合体的结构特征；空间图形的画法及柱、锥、台、球的表面积和体积计算公式．

第二部分是引出直线与平面，讨论直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系的判定与性质．

1．公理1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在这个平面内．

2．公理2：过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面．

3．公理3：平行于同一条直线的两条直线平行．

4．公理4：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们的交集是一条过该点的直线．

5. 定理 1：空间中如果两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等或互补.

6. 定理 2：一条直线与一个平面平行，则过该直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行.

7. 定理 3：平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与该平面平行.

8. 定理 4：两个平面平行，则任意一个平面与这两个平面相交所得的交线互相平行.

9. 定理 5：一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行.

10. 定理 6：如果一条直线垂直于一个平面内的两条相交直线，那么这条直线就与这个平面垂直.

11. 定理 7：垂直于同一个平面的两条直线平行.

12. 定理 8：如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面垂直.

13. 定理 9：两个平面垂直，则其中一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直.

三、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求：

(1) 认识柱、锥、台、球及简单几何体的结构特征.

(2) 能画出简单空间图形的三视图，会用斜二测画法画出它们的直观图.

(3) 了解柱、锥、台、球的表面积和体积的计算公式（不要求记忆）.

(4) 借助长方体模型，在直观认识和理解空间点、线、面的位置关系的基础上，抽象出空间线、面位置关系的定义，并了解本章中的四个公理.

(5) 通过直观感知、操作确认，掌握线面、面面平行及垂直的判定定理和性质定理.

（6）能运用已获得的结论证明一些空间位置关系的简单命题．

2．需要注意的问题：

（1）本章主要内容是借助长方体研究空间的线线、线面、面面的位置关系，在位置关系中着重研究的是平行和垂直关系．一定要借助实物模型或计算机软件呈现空间几何体，去认识其结构特征，反过来，运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构．

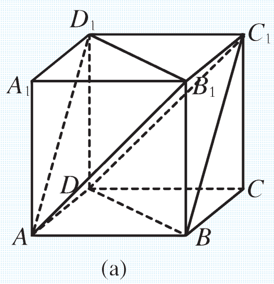
（2）通过实际模型的认识，注意将自然语言转化为图形语言和符号语言．例如，在对长方体直观感知的基础上，认识空间中一般的点、线、面的位置关系，通过图形的观察、实验和说理，进一步了解平行、垂直关系的基本性质及判定方法．

（3）关于线线、线面、面面位置关系的判定定理和性质定理是本章的主要内容，运用这些定理时，要弄清定理的题设和结论，要敢于将题设和结论换位思考或部分换位多角度思考，从而熟练地掌握这些定理，并能灵活运用．

（4）立体几何问题中的点、线、面关系，往往通过在某些特定的面上来研究，从而将空间问题转化为我们熟悉的平面问题来解决，这种转化的思想方法在本章显得尤其重要．

四、参考例题

例 1　如图 6-77，在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，



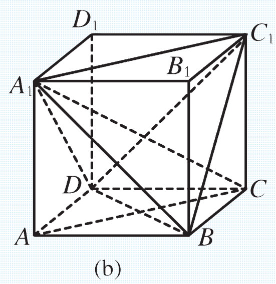


图 6-77

（1）求证：$B_1D_1 /\!/$ 面 C_1BD；

（2）求证：面 $AB_1D_1 /\!/$ 面 C_1BD；

（3）求证：$A_1C \perp$ 面 C_1BD；

（4）求证：面 $C_1BD \perp$ 面 ACC_1A_1；

(5) 求三棱锥 $B\text{-}A_1C_1D$ 的体积.

(1) **证明** 如图 6-77(a),在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

$AA_1 \underline{/\!/} BB_1$, $AA_1 \underline{/\!/} DD_1 \Rightarrow BB_1 \underline{/\!/} DD_1$,

$\therefore$ B_1BDD_1 是平行四边形$\Rightarrow B_1D_1 /\!/ BD$.

又 $B_1D_1 \not\subset$ 面 C_1BD, $BD \subset$ 面 C_1BD,

$\therefore$ $B_1D_1 /\!/$ 面 C_1BD.

(2) **证明** 如图 6-77(a),由 (1) 得 $B_1D_1 /\!/$ 面 C_1BD,

同理,由 $AD_1 /\!/ BC_1$ 知 $AD_1 /\!/$ 面 C_1BD.

而 AD_1 与 B_1D_1 是面 AB_1D_1 内两条相交直线,

$\therefore$ 面 $AB_1D_1 /\!/$ 面 C_1BD.

(3) **证明** 如图 6-77(b),在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

$\because$ $BD \perp AC$,且由 $AA_1 \perp$ 面 $ABCD$ 知 $BD \perp AA_1$.

$\therefore$ $BD \perp$ 面 ACC_1A_1. 又 $A_1C \subset$ 面 ACC_1A_1, $\therefore A_1C \perp BD$.

同理 $A_1C \perp C_1D$. $\therefore$ $A_1C \perp$ 面 C_1BD.

想一想为什么 $A_1C \perp C_1D$?

(4) **证明** 由 (3) 得 $A_1C \perp$ 面 C_1BD, $A_1C \subset$ 面 ACC_1A_1,

$\therefore$ 面 $C_1BD \perp$ 面 ACC_1A_1.

(5) **解** 如图 6-77(b),

$$V_{B\text{-}A_1C_1D} = V_{ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1} - V_{A_1\text{-}ABD} - V_{C_1\text{-}CBD} - V_{B\text{-}A_1B_1C_1} - V_{D\text{-}A_1C_1D_1}$$
$$= a^3 - 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a\right) = \frac{1}{3}a^3.$$

割补的方法对求体积十分有用,要认真体会.

例 2 如图 6-78,三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中,$AB=BC=CD=DA=BD=AC=2a$,E,F,G,H 分别为 AB,BC,CD,DA 的中点.

(1) 试判断四边形 $EFGH$ 的形状,并证明你的结论;

(2) 试求多面体 $BD\text{-}EFGH$ 的体积.

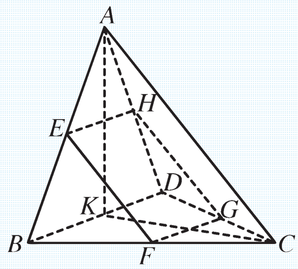


图 6-78

解 (1) $\because$ EH 是$\triangle ABD$ 的中位线,

$\therefore$ $EH \underline{/\!/} \frac{1}{2}BD$.

同理 $FG \underline{/\!/} \frac{1}{2}BD$.

$\therefore$ $EH \underline{/\!/} FG$.

注意还要进一步探求，看还有没有特殊性，不能到此就止.

∴ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

又∵ $EH=EF=a$，

∴ 四边形 $EFGH$ 为菱形.

设 BD 的中点为 K.

∵ $AB=AD$，

∴ $AK\perp BD$.

同理 $CK\perp BD$，

∴ $BD\perp$面 ACK.

又 $AC\subset$面 ACK，

∴ $BD\perp AC$.

又 $EH/\!/BD$，$EF/\!/AC$，

∴ $EH\perp EF$.

又∵ 四边形 $EFGH$ 为菱形，

∴ 四边形 $EFGH$ 为正方形.

(2) ∵ 平面 $EFGH$ 将三棱锥分成了体积相同的两个几何体，

$$
\begin{aligned}
\therefore\ V_{BD\text{-}EFGH}&=\frac{1}{2}V_{A\text{-}BCD}\\
&=\frac{1}{2}(V_{B\text{-}ACK}+V_{D\text{-}ACK})\quad(\because V_{B\text{-}ACK}=V_{D\text{-}ACK})\\
&=V_{B\text{-}ACK}\\
&=\frac{1}{3}S_{\triangle ACK}\cdot BK\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\sqrt{2}a\right)\cdot a\\
&=\frac{\sqrt{2}}{3}a^{3}.
\end{aligned}
$$

复习题六

学而时习之

1. 请画出你所在学校的一座教学楼的正视图、右视图和俯视图.
2. 一个棱柱，上、下底面是边长为 3 cm 的正六边形，侧面都是矩形，高为 5 cm，请画出该棱柱的直观图.
3. 一个几何体，共六个侧面，六个侧面都是全等的等腰梯形，等腰梯形的上底长为 10 cm，下底长为 15 cm，腰为 9 cm，上、下底面都是正六边形，求该几何体的全面积.
4. 有一个奖杯，底座是一个长方体，底面是长为 10 cm，宽为 8 cm 的长方形，高为 6 cm；底座上面的也是长方体，放在底座的正中，各面相应地与底座的各面平行，其底面是长为 5 cm，宽为 4 cm 的长方形，高为 20 cm；顶端是一个球体，放在长方体的正中，球体的半径为 3 cm. 假设球体刚好放在长方体上，没有更多的接触面，求该奖杯的体积和表面积.
5. 长方体的一个顶点上的三条棱长分别为 3，4，5，且它的八个顶点都在同一个球面上，求这个球的表面积.

温故而知新

6. 求证：与两条异面直线分别相交的两条直线不平行.
7. 如图 6-79，已知△ABC 是正三角形，EA 和 DC 都垂直于平面 ABC，且 $EA=AB=2a$，$DC=a$，F，G 分别是 EB 和 AB 的中点.

   求证：$FG\perp$ 平面 ABC；$FD/\!/$ 平面 ABC.

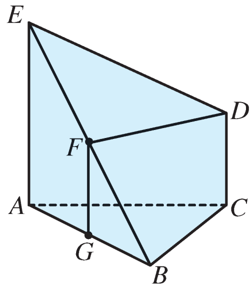


图 6-79

8. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，判断平面 A_1C_1B 与平面 BB_1D_1D 是否垂直，并说明你的理由.

9．如图 6-80，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，O 分别是 A_1B，AC 的中点．求证：OM∥平面 BB_1C_1C．

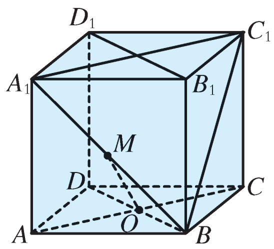


图 6-80

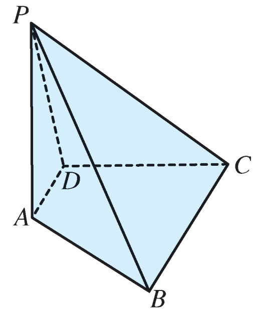


图 6-81

10．如图 6-81，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形，AD∥BC，$\angle BCD=90°$，且 $PA\perp AB$，$PD\perp CD$．

（1）判断 CD 是否与平面 PAD 垂直，证明你的结论；

（2）证明：平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$．

11．a，b，c 是空间互不重合的三条直线，试讨论它们之间的各种位置关系．

12．已知 $ABCD$ 是圆柱的轴截面，E 是底面圆周上异于 A，B 的一点，试问截面 DAE 与截面 DBE 是否垂直，为什么？

上下而求索

通过实验、观察和初步的理论分析研究直线在中心投影下的性质．

比如，观察电线杆在路灯下的阴影；用台灯或手电筒光照射四边形纸板，观察纸板边缘在地板、墙壁或天花板上的阴影．还可以设计其他实验，观察其他现象．

建议研究以下问题：

（1）直线的投影是什么图形？是否一定是直线？

（2）平行直线的投影是什么图形？是否可能是相交直线？如果可能相交，研究交点的位置．

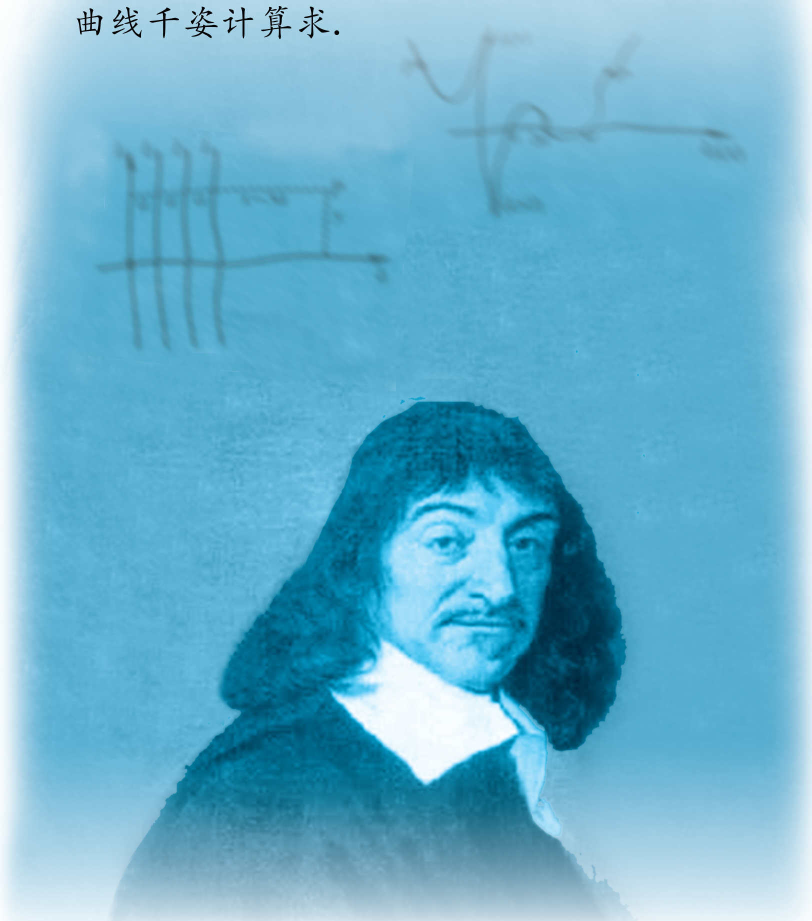
（3）相交直线的投影是什么图形？是否可能是平行直线？如果可能平行，在什么条件下平行？

还可以研究其他相关问题．

尝试对你通过观察现象得到的结论说出适当的道理．

第7章 解析几何初步

代数几何熔一炉，
乾坤变幻坐标书.
图形百态方程绘，
曲线千姿计算求.



解析几何的基本内容是用代数方法研究几何问题，把几何图形的最基本元素——点和曲线分别用坐标和方程来描述，几何问题转化成数和方程的问题，用代数运算来求解，再将所得到的结论翻译成几何的语言.

数学实验

凹面镜的反射

在物理课程中学过：反射面为球面的凹面镜将平行于主轴的光线反射之后会聚于一点，这一点称为这个凹面镜的焦点．下面通过实验来研究这个问题．

如图 7-1，设 CO 是镜面所在的球面的一条半径，C 是球心，O 是镜面的顶点．过 CO 作平面与镜面相交于一段圆弧$\overset{\frown}{AOB}$，则镜面可以看作由圆弧$\overset{\frown}{OA}$绕 CO 旋转一周得到．我们只需在$\overset{\frown}{OA}$和 CO 所在的这个平面上考虑平行于 CO 的光线经过镜面的反射后是否交于一点．

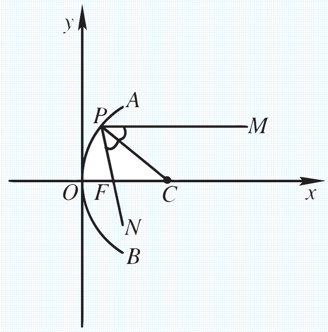


图 7-1

设 P 是弧$\overset{\frown}{OA}$上任意一点，过 P 作 $PM // OC$．光线沿 MP 射到镜面上点 P，则 PC 是镜面的法线方向，反射光线 PN 满足条件：反射角 $\angle CPN=$ 入射角 $\angle MPC$．根据这个条件可以对每个点 P 作出反射光线 PN．对圆弧$\overset{\frown}{OA}$上一系列不同的点 P 作出反射光线，观察这些光线是否交于一点．

你可以利用作图工具（三角板、直尺、圆规、量角器等）进行手工作图，对圆弧$\overset{\frown}{OA}$上一系列不同的点 P，按照光的反射定律作出反射光线 PN，观察这些反射光线是否交于一点．

试对圆心角 $\angle ACO$ 比较小的情况及比较大的情况分别作图，观察反射光线是否交于一点．

图 7-2 是我们利用计算机作的两个图．只要你有耐心，自己通过手工作图也能够作出这两个图来．

观察这两个图可知，当圆心角 $\angle ACO$ 比较小的时候（如图 7-2

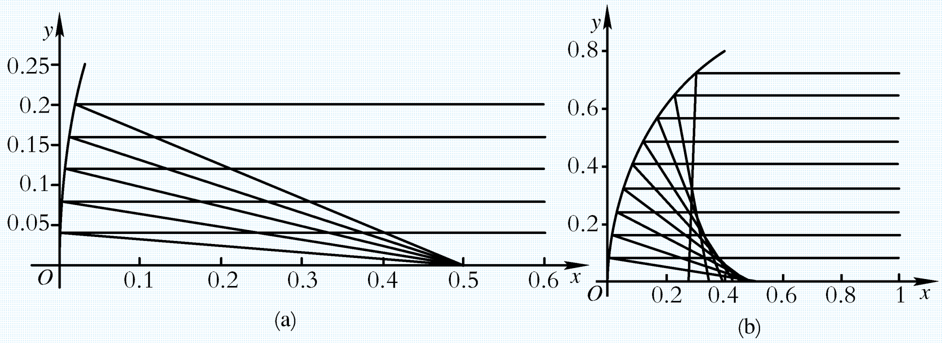


图 7-2

(a))，反射光线近似地交于半径 CO 的中点 $F(0.5,0)$，点 F 就是这个凹面镜的焦点．而当圆心角 $\angle ACO$ 很大的时候(如图 7-2(b))，反射光线明显地不交于一点．因此，以球面为反射镜面的凹面镜，都要求圆心角 $\angle ACO$ 比较小．

很自然地提出两个问题：

1．如何利用计算机作图？

2．能否通过计算从理论上说明：如果圆心角 $\angle ACO$ 足够小，那么反射光线近似地交于半径 CO 的中点．

以 O 为原点、OC 方向为 x 轴正方向、OC 的长度为单位长度建立直角坐标系．

如果入射光线沿着 x 轴的负方向射到原点 O，则反射光线从 O 出发沿着 x 轴的正方向射出．因此，x 轴的非负半轴 Ox 是其中一条反射光线．

对镜面圆弧 $\overset{\frown}{OA}$ 上不同于点 O 的任一点 $P(x,y)$，为了利用计算机作出反射光线 PN，需要根据点 P 的纵坐标 y 算出它的横坐标 x，并根据条件 $\angle CPN=\angle MPC$ 计算出反射光线 PN 与 x 轴交点 F 的横坐标 f．

如果能够对在指定范围内的每一个 y（比如 $y>0$）都算出 x 和 f，就能利用计算机作出从点 $P(x,y)$ 到 $F(f,0)$ 的反射光线，并且还能比较由不同的 y 得出的 f 是否近似地相等．

如果不但对具体的 y 值能够算出 f 的值，而且能够给出由 y 计算 f 的表达式，就能根据这个表达式分析当 y 在一定范围内变

化时 f 是否近似地不变.

怎样由圆弧上一点 P 的纵坐标 y 算出它的横坐标 x? 这就需要知道圆弧所在的圆周上点的坐标 (x, y) 满足什么条件. 这个条件也就是 x, y 满足的一个方程, 称为这个圆的方程.

怎样计算出反射光线 PN 与 x 轴交点 $F(f, 0)$ 的横坐标 f? 这就需要知道直线 PN 上点的坐标满足什么条件. 这个条件就是这条直线上点的横坐标和纵坐标满足的一个方程, 称为这条直线的方程.

学习了本章中关于直线和圆的方程的知识, 利用这些知识你就能解决关于凹面镜反射光线的上述计算问题了. 以后学了更多的关于曲线方程的知识, 你还会知道能够将平行光线准确地聚于一点的凹面镜是什么形状.

7.1 点的坐标

几何图形由点组成. 点没有大小，没有内部构造，不同的点唯一的区别就是位置的不同.

怎样表示点的位置? 先取一个点 O 作为基准点，称为**原点**(origin). 取定这个基准点之后，任何一个点 P 的位置就由 O 到 P 的向量$\overrightarrow{OP}$唯一表示. $\overrightarrow{OP}$称为点 P 的**位置向量**（position vector)，它表示的是点 P 相对于点 O 的位置.

在平面上取定两个相互垂直的**单位向量**（unit vector）$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 作为**基**（basis)，则$\overrightarrow{OP}$可唯一地分解为

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$$

的形式，其中 x，y 是一对实数. (x, y) 就是向量$\overrightarrow{OP}$的**坐标**(coordinates)，坐标唯一地表示了向量$\overrightarrow{OP}$，从而也唯一地表示了点 P 的位置.

以 O 为原点，以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的方向分别作为 x 轴和 y 轴的正方向，以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的共同长度作为单位长度，建立直角坐标系，则向量$\overrightarrow{OP}$在基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 下的坐标(x,y)也就是点 P 在这个直角坐标系下的坐标.

反过来，假定在平面上建立了一个直角坐标系. 取 x 轴正方向和 y 轴正方向上的单位向量组成一组基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，则每个点 P 在这个直角坐标系下的坐标(x,y)也就是从原点 O 到这点 P 的向量$\overrightarrow{OP}$在这组基下的坐标.

我们约定：凡是在平面上建立了直角坐标系，都用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示 x 轴、y 轴正方向上的单位向量. 如果只说向量的坐标而不特别指明是在哪一组基下的坐标，都是指这个向量在这组基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 下的坐标.

我们还约定：将 x 轴的非负半轴绕原点 O 沿逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到 y 轴的非负半轴.

一、从任意一点出发的向量的坐标

已经知道从原点出发到任一点 P 的向量的坐标就是 P 点的坐标

(x, y). 那么，不一定从原点出发，而从任一点 $A(x_1, y_1)$ 出发到任一点 $B(x_2, y_2)$ 的向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标怎样计算呢?

如图 7-3，我们有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$
$$=(x_2, y_2)-(x_1, y_1)$$
$$=(x_2-x_1, y_2-y_1).$$

也就是说：**向量的坐标等于它的终点坐标减去起点坐标.**

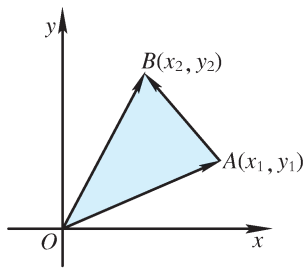


图 7-3

二、两点之间的距离

由于将点 A，B 的坐标看作向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的坐标，利用向量运算法则立即导出了距离公式.

如果不用向量求 $|AB|$，就要作辅助线用勾股定理，还要讨论各种情况，你愿意试一试吗?

现在很容易由两点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 的坐标求出它们之间的**距离**(distance) $|AB|$. $|AB|$ 也就是向量 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ 的**长度** (length).

由 $|AB|^2=\overrightarrow{AB}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$，得

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad \text{（两点之间的距离公式）}$$

例 1 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(1,-1)$, $B(-1,3)$, $C(3,0)$.

(1) 求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形；

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

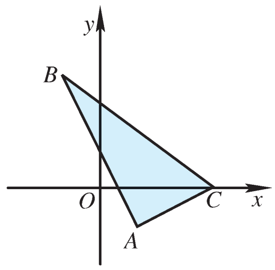


图 7-4

解 如图 7-4 所示.

(1) $\overrightarrow{AB}=(-1-1, 3-(-1))=(-2, 4)$,

$\overrightarrow{AC}=(3-1, 0-(-1))=(2, 1)$.

怎样想到求 $\angle A$ 而不先求另外两个角?

故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2, 4)\cdot(2,1)=(-2)\times2+4\times1=0$

$\Rightarrow AB\perp AC\Rightarrow\angle A=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\triangle ABC$ 是直角三角形.

(2) 由于 $\angle A$ 是直角，故 $\triangle ABC$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}=\frac{1}{2}\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}=5.$$

你是否会问：假如 $\triangle ABC$ 不是直角三角形，怎样求它的面积?

你应当提出这个问题，暂时回答不出来也没有关系，以后再研究.

练 习

1. 已知点 $A(2, 5)$，$B(3, 8)$，则 $\overrightarrow{AB}=$________.
2. 已知▱$ABCD$ 的三个顶点 $A(4,2)$，$B(5,7)$，$C(-3,4)$，求顶点 D 的坐标.
3. 已知点 $A(3, 4)$，点 B 在 y 轴上，$|AB|=5$，求点 B 的坐标.
4. 求证：以 $A(-3, 0)$，$B(3,2)$，$C(-1,-2)$ 三点为顶点的三角形是直角三角形.

三、定比分点坐标

例 2 已知两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，求线段 AB 的中点 M 的坐标.

解 “M 是 AB 的中点”用向量的语言描述出来就是：$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$（如图 7-5）. M 的坐标也就是它的位置向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标. 而

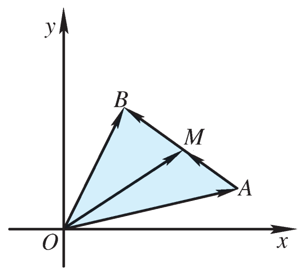


图 7-5

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\\&=\frac{1}{2}((x_1, y_1)+(x_2, y_2))\\&=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).\end{aligned}$$

故中点 M 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

由例 2 可以得出：已知线段两端点的坐标 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，求该线段中点坐标 (x, y) 的公式为

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{cases}\quad\text{（中点坐标公式）}$$

我们的基本方法是：

几何性质
M 是 AB 中点

↓

向量描述
$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

↓ 向量运算

向量结论
$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

↓

坐标公式

这个方法将反复使用.

可叙述为：**线段中点的坐标等于线段两个端点相应坐标的算术平均值.**

容易看出，利用例 2 的方法可以求出线段的三等分点、四等分点的坐标等等. 一般地，如果已知直线 AB 上一点 P 将有向线段$\overrightarrow{AB}$分成的两条有向线段的比λ，是否可以求出点 P 的坐标?

设 A，B 是两个不同的点，如果点 P 在直线AB 上且$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，则称$\lambda$为点 P 分有向线段$\overrightarrow{AB}$所成的**比**（ratio）.

注意：当 P 在线段 AB 之间时，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{PB}$方向相同，比值$\lambda>0$. 我们也允许点 P 在线段 AB 之外，此时$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{PB}$方向相反，比值$\lambda<0$且$\lambda\neq-1$. 当点 P 与点 A 重合时$\lambda=0$. 而点 P 与点 B 重合时$\overrightarrow{AP}$不可能写成$\overrightarrow{PB}=0$的实数倍.

例 3 已知两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，且点 P 分有向线段$\overrightarrow{AB}$所成的比为λ. 求点 P 的坐标.

解 将等式$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$中出现的向量都用从原点出发的向量来表示，由图 7-6，得

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})\Rightarrow$$

$$(1+\lambda)\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{(x_1, y_1)+\lambda(x_2, y_2)}{1+\lambda}$$

$$=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right).$$

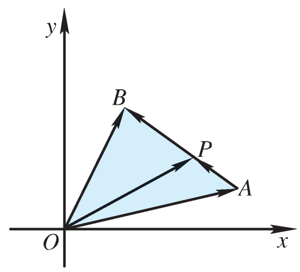


图 7-6

即

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$$

（定比分点坐标公式）

特别地，当$\lambda=1$时，点 P 就是线段 AB 的中点. 将$\lambda=1$代入上面的定比分点坐标公式，就得到前面的中点坐标公式.

例 4 如图 7-7，已知$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$. 求这个三角形的重心 G 的坐标.

解 边 BC 的中点 M 的坐标为

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

点 G 在 AM 上，且 $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GM}$，故点 G 坐标为

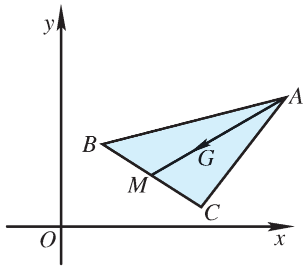


图 7-7

$$\left(\frac{x_1+2\dfrac{x_2+x_3}{2}}{1+2},\ \frac{y_1+2\dfrac{y_2+y_3}{2}}{1+2}\right)$$

$$=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

叙述为：**三角形重心的坐标等于三个顶点相应坐标的算术平均值.**

这一结论可以作为公式来使用.

例 5 已知两点 $A(3,1)$，$B(-1,5)$，延长 AB 到 C 使 $|BC|=\frac{1}{2}|AB|$. 求点 C 的坐标.

解 可以仿照例 2 和例 3 直接用向量的方法.

也可以直接利用定比分点坐标公式：由 $|BC|=\frac{1}{2}|AB|$，知 $|AB|=2|BC|$，所以 $|AC|=3|CB|$，因而 $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{CB}$，故有 $\lambda=-3$.

将 $\lambda=-3$ 代入定比分点坐标公式，即得 C 点坐标为

$$\left(\frac{3+(-3)\times(-1)}{1-3},\ \frac{1+(-3)\times 5}{1-3}\right)=(-3,7).$$

练 习

1. 已知两点 $A(3,-5)$，$B(-3,8)$，点 C 在线段 AB 上，$|AB|=4|CB|$，求点 C 的坐标.
2. 求以 $A(-5,2)$，$B(2,-2)$，$C(-3,3)$ 三点为顶点的三角形的重心坐标.
3. 已知以 $A(-3,0)$，$B(3,2)$，$C(a,b)$ 三点为顶点的三角形的重心为 $G(1,1.5)$，求 a，b 的值.

习题 1

学而时习之

1. 已知点 $A(-3, -1)$，点 B 在 x 轴上，$|AB|=4$，求点 B 的坐标.
2. 已知点 $A(-3, -1)$，点 B 在第二象限的角平分线上，$|AB|=5$，求点 B 的坐标.
3. 已知两点 $A(-3, 3)$，$B(3, 2)$，点 C 在线段 AB 上，且 $|AC|=2|CB|$，求点 C 的坐标.
4. 求以 $A(0, 2)$，$B(2, 0)$，$C(3, 3)$ 三点为顶点的三角形的三条中线的长度.

温故而知新

5. 等边三角形 ABC 的两个顶点坐标分别为 $A(4,-6)$，$B(-2,-6)$，求点 C 的坐标.
6. 已知▱$ABCD$ 的两个顶点坐标分别为 $A(4,2)$，$B(5,7)$，对角线交点为 $E(-3,4)$，求另外两个顶点 C，D 的坐标.
7. 已知△ABC 的三个顶点分别为 $A(3, 1)$，$B(-3, -2)$，$C(a, b)$，且它的重心 G 关于点 $D(1,1)$ 的对称点的坐标为 $(1,3.5)$. 求 a，b 的值.

7.2 直线的方程

7.2.1 直线的一般方程

在学习一次函数时，我们已经知道**一次函数**（linear function）$y=kx+b$ 的图象是**直线**（line）. 函数关系式 $y=kx+b$ 也可以看作关于 x，y 的二元一次方程，并且可以化为 $kx-y+b=0$ 的形式，因此这条直线也就是二元一次方程 $kx-y+b=0$ 的图象.

一般地，对任意一个二元方程 $f(x, y)=0$，以这个方程的某一组解(x, y)为坐标，有唯一一个点与之对应，所有这些点组成的集合称为这个方程的**图象**(figure).

很自然要问：任意一个二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A，B，C 是常数，且 A，B 不全为 0）的图象是什么？是不是直线？如果是，是怎样一条直线？

先来研究一个具体的例子.

例 1 试确定二元一次方程 $2x+3y-6=0$ 的图象.

解 方程可写成 $2(x-3)+3y=0$ 的形式. 左边的

$$2(x-3)+3y=(2,3)\cdot(x-3,y)$$

可看成向量$(2,3)$与$(x-3,y)$的内积. 而方程就成为

$$(2,3)\cdot(x-3,y)=0,$$

即

$$(2,3)\perp(x-3,y). \qquad ①$$

点的坐标等式
$2x+3y-6=0$
↓
向量坐标等式
$(2,3)\cdot(x-3,y)=0$
↓
几何性质
$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{P_0P}$

$\boldsymbol{n}=(2,3)$是一个固定的向量，其坐标由方程 $2x+3y-6=0$ 的一次项系数组成.

$(x-3,y)=(x,y)-(3,0)$是向量$\overrightarrow{P_0P}$的坐标，其中点 $P(x,y)$是图象上任一点，点 $P_0(3,0)$是图象上的一个固定的点.

因此，①式所要求的就是：点 P 在过点 $P_0(3, 0)$且与向量 $\boldsymbol{n}=(2, 3)$垂直的直线 l 上.

满足这一条件的所有点 P 所组成的图象就是这条直线 l（如图 7-8 所示）.

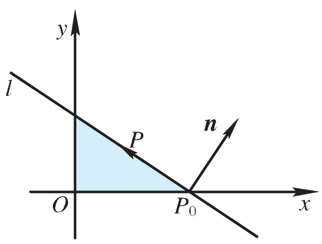


图 7-8

反过来，如果已经知道直线 l 过点 $P_0(3,0)$且垂直于向量$(2, 3)$，则直线上任一点 $P(x, y)$满足的条件为$(2,3)\perp\overrightarrow{P_0P}$，即$(2,3)\cdot(x-3,y)=0$，于是 $2(x-3)+3y=0$. 即$2x+3y-6=0$ 就是这条直线的方程.

例 1 的推理和结论可以推广到一般的二元一次方程.

例 2 （1）试确定二元一次方程 $Ax+By+C=0$ 的图象的形状和位置. 其中 A，B，C 是实数，且 A，B 不全为 0；

(2) 直线 l 垂直于非零向量 (A,B) 且经过点 $P_0(x_0,y_0)$，求直线 l 的方程.

解 (1) 由于 A，B 不全为 0，至少有一组解 (x_0,y_0)，使得

$$Ax_0+By_0+C=0. \quad ①$$

(比如，当 $A\neq0$ 时，$\left(-\dfrac{C}{A},0\right)$是解；当 $B\neq0$ 时，$\left(0,-\dfrac{C}{B}\right)$是解.)

方程 $Ax+By+C=0$ 减去等式 $Ax_0+By_0+C=0$，化为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \quad ②$$

将左边写成内积的形式，即

$$(A,B)\cdot(x-x_0,y-y_0)=0. \quad ③$$

其几何意义就是

$$(A,B)\perp\overrightarrow{P_0P}, \quad ④$$

其中 $P_0(x_0,y_0)$ 是图象上的固定点，$P(x,y)$ 是图象上任意一点.

用几何语言将④式叙述出来，就是：

点 P 在过点 P_0 且与 $\boldsymbol{n}=(A,B)$ 垂直的直线 l 上（如图 7-9）.

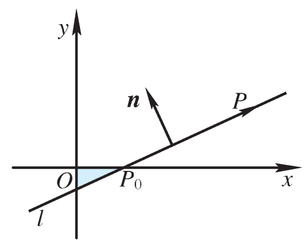


图 7-9

因此，方程的图象就是这条直线 l.

(2) 平面上任一点 $P(x,y)$ 在直线 l 上的充分必要条件为

$$(A,B)\perp\overrightarrow{P_0P},$$

即 $\quad (A,B)\cdot(x-x_0,y-y_0)=0.$

即 $\quad A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$

也就是说：直线 l 的方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

将例 2 得到的结论写成定理，以便于以后应用.

定理 1 任意一个二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A,B 不全为 0）的图象是与 $\boldsymbol{n}=(A,B)$ 垂直的一条直线.

反过来，设直线 l 垂直于已知非零向量 $\boldsymbol{n}=(A,B)$，且经过已知点 $P_0(x_0,y_0)$，则 l 的方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \quad ⑤$$

经过整理可化为一般的二元一次方程

$$Ax+By+C=0 \qquad ⑥$$

的形式，这种形式的方程称为直线的**一般式方程**(equation of general form).

如果非零向量 $\boldsymbol{n}$ 与直线 l 垂直，就称 $\boldsymbol{n}$ 是 l 的**法向量**（normal vector）. 因此，方程⑤就是已知法向量及直线上一点的坐标求出的直线方程. 由于对任何一条直线都可以作出它的法向量并在直线上取出一点，因此形如⑤的方程囊括了所有的直线方程. 但在应用时不需记住这个方程，只要记住一般式方程 $Ax+By+C=0$ 并知道它的**一次项系数组成直线的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标（A，B）**就行了. 要求常数项 C，只要将直线上已知点(x_0, y_0)的坐标代入方程得到 $Ax_0+By_0+C=0$，即可得到 C.

(A,B)是直线$Ax+By+C=0$的法向量，这是解决直线方程问题的钥匙. 掌握了这把钥匙，你就得心应手了.

练　习

1. 已知直线的法向量是 $\boldsymbol{n}=(2，3)$，并且过点$(-3，4)$，求该直线的方程.
2. 已知线段两端点分别为 $A(1,2)$,$B(-1,3)$,求线段 AB 的中垂线方程.
3. 求与直线 $2x-3y-4=0$ 平行，且过点$(0.5，-1)$的直线的方程.

例 3　如图 7-10，已知$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(1,-1)$，$B(-1,3)$，$C(3,0)$. AD 是 BC 边上的高，AE 是$\angle BAC$ 的平分线. 求：

（1）高 AD 所在直线的方程；

（2）边 BC 的垂直平分线的方程；

（3）边 BC 所在直线的方程；

（4）$\angle A$ 的平分线 AE 所在直线的方程.

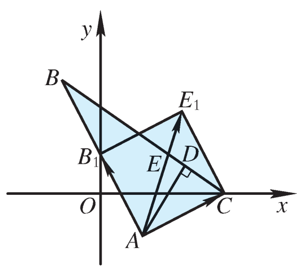


图 7-10

为求直线方程，先找出它们的法向量.

解　（1）$BC\perp AD$，因此$\overrightarrow{BC}$是直线 AD 的法向量.

$\overrightarrow{BC}$的坐标为$(3-(-1),0-3)=(4,-3)$，故直线 AD 的方程具有形式

$$4x-3y+C=0.$$

将 $A(1,-1)$代入，得 $4\times1-3(-1)+C=0$，$C=-7$.

因此，直线 AD 的方程为 $4x-3y-7=0$.

(1)，(2) 中的直线的法向量都可以取$\overrightarrow{BC}$.

(2) BC 的垂直平分线 l 过 BC 的中点 M，M 的坐标为

$$\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{3+0}{2}\right)=\left(1,\ \frac{3}{2}\right).$$

且 $l\perp BC$，$\overrightarrow{BC}=(4,-3)$是 l 的法向量.

故 l 的方程具有形式 $4x-3y+C=0$. 将 M 点坐标代入，得

$$4-\frac{9}{2}+C=0,\quad C=\frac{1}{2}.$$

故 BC 的垂直平分线方程为 $4x-3y+\frac{1}{2}=0$，也可写为 $8x-6y+1=0$.

(3)直线 BC 的法向量垂直于$\overrightarrow{BC}=(4,-3)$，容易凑出

$$0=3\times4+4\times(-3)=(3,4)\cdot(4,-3).$$

由$\overrightarrow{BC}=(4,-3)$凑出直线 BC 的法向量$(3,4)$.

可见 $\boldsymbol{n}=(3,4)$垂直于$\overrightarrow{BC}$，$\boldsymbol{n}$ 就是 BC 的法向量，故 BC 的方程具有形式

$$3x+4y+C=0.$$

将点 $B(-1,3)$代入，得 $3\times(-1)+4\times3+C=0$，$C=-9$. 故 BC 的方程为

$$3x+4y-9=0.$$

(4) 只要分别在$\overrightarrow{AB}=(-1-1,3-(-1))=(-2,4)$和$\overrightarrow{AC}=(3-1,0-(-1))=(2,1)$的方向上取长度相等的向量$\overrightarrow{AB_1}$和$\overrightarrow{AC_1}$，则$\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AE_1}$的方向就是角平分线$\overrightarrow{AE}$的方向. 由

$$|AB|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}\text{及}|AC|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5},$$

可知$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right|=|\overrightarrow{AC}|$，于是

由角平分线方向向量$(1,3)$凑出法向量$(3,-1)$.

$$\overrightarrow{AE_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(-2,4)+(2,1)=(1,3)$$

的方向就是$\overrightarrow{AE}$的方向.

而由$(3,-1)\cdot(1,3)=3\times1+(-1)\times3=0$，知 $\boldsymbol{n}=(3,-1)$垂直

于$\overrightarrow{AE_1}$，从而垂直于$\overrightarrow{AE}$，(3，−1)就是 AE 的法向量.

因此，直线 AE 的方程具有形式

$$3x-y+C=0.$$

将点 $A(1,-1)$代入，得 $3+1+C=0$，$C=-4$. 故直线 AE 的方程为

$$3x-y-4=0.$$

例 3 中使用的两个基本方法既简单又实用，值得注意：

1. 怎样寻找与 $\boldsymbol{v}=(a,b)$垂直的向量 $\boldsymbol{n}$?

凑 $$0=ba+(-a)b=(b,-a)\cdot(a,b),$$

可知 $\boldsymbol{n}=(b,-a)$与(a,b)垂直. $-\boldsymbol{n}=(-b,a)$也与 $\boldsymbol{v}$ 垂直.

$\boldsymbol{v}=(a,b)$与$\pm\boldsymbol{n}=\pm(b,-a)$长度相等，都等于$\sqrt{a^2+b^2}$. 将$(a,b)$沿逆时针方向旋转$\frac{\pi}{2}$就得到$(-b,a)$，而沿顺时针方向旋转$\frac{\pi}{2}$就得到$(b,-a)$.

2. 怎样求$\angle BAC$ 的角平分线 AE 的方向向量？

分别取长度相等的$\overrightarrow{AB}$方向上的向量$\overrightarrow{AB_1}$与$\overrightarrow{AC}$方向上的向量$\overrightarrow{AC_1}$，如图 7-11 所示，则

$$\overrightarrow{AE_1}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC_1}$$

的方向就是$\overrightarrow{AE}$的方向. 与$\overrightarrow{AE_1}$垂直的非零向量就是角平分线 AE 的法向量.

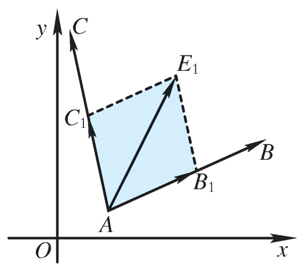


图 7-11

怎样选取$|AB_1|=|AC_1|$?

一种方法是：分别取$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$方向上的单位向量

$$\overrightarrow{AB_1}=\frac{1}{|AB|}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{|AC|}\overrightarrow{AC},$$

则 $$|AB_1|=|AC_1|=1.$$

另一种方法是：先计算线段 AB，AC 长度之比$\lambda=\frac{|AB|}{|AC|}$，则$\overrightarrow{AC}$的 λ 倍$\overrightarrow{AC_1}$的长度与$\overrightarrow{AB}$的长度相等，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AE_1}$的方向即为$\overrightarrow{AE}$的方向.

例 3 中包含了解决以下几个问题的算法：

（1）已知直线 AD 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 和直线上一点 A 的坐标，求直线 AD 的方程；

（2）已知直线上两点 B，C 的坐标，求直线 BC 的方程；

（3）已知与直线 AE 平行的向量 $\boldsymbol{v}$ 及 A 的坐标，求直线 AE 的方程.

想一想，你能把这些算法推广到一般的情况吗？

例 4 已知两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，求直线 AB 的方程.

解法一 向量 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$. 直线 AB 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 垂直，可取为 $\boldsymbol{n}=(y_2-y_1,-(x_2-x_1))$. 于是 AB 的方程具有形式

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y=c.$$

将直线上点 A 的坐标代入，得

$$c=(y_2-y_1)x_1-(x_2-x_1)y_1.$$

于是直线 AB 的方程为

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y=(y_2-y_1)x_1-(x_2-x_1)y_1.$$

也可写为

$$(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0.$$

解法二 点 $P(x,y)$ 在直线 AB 上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}/\!/\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$

$$(x-x_1,y-y_1)/\!/(x_2-x_1,y_2-y_1) \Leftrightarrow$$

$$(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0.$$

最后这个式子就是直线 AB 的方程.

两点式方程不需记忆，只要会用法向量将它推出来就行了.

例 4 得出的方程称为**两点式方程**（equation of two points form）.

练习

已知△ABC 的三个顶点分别为 $A(3,4)$，$B(6,0)$，$C(-5,-2)$，求：

（1）边 AB 所在的直线方程；

（2）边 BC 的垂直平分线的方程；

（3）高 AD 所在的直线方程；

（4）$\angle B$ 的平分线 BE 所在的直线方程.

习题 2

学而时习之

1. 已知直线过两点 $A(1,-2)$，$B(-3,2)$，求过点 A 且与直线 AB 垂直的直线 l 的方程.
2. 已知直线的法向量 $\boldsymbol{n}=(-2,-3)$，并且该直线过点 $(3,4)$，求该直线的方程.
3. 求与直线 $2x+3y+5=0$ 平行，且过点 $(5,1)$ 的直线的方程.
4. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(3,-4)$，$B(6,0)$，$C(-5,2)$，求：

   (1) 边 AB 所在的直线方程；

   (2) 边 BC 的垂直平分线的方程；

   (3) 高 AD 所在的直线方程；

   (4) $\angle B$ 的平分线 BE 所在的直线方程.

温故而知新

5. 若第 4 题 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别变为 $A(-3,-4)$，$B(-6,0)$，$C(5,2)$，上述各小问的答案如何？
6. 请比较 4，5 两题的题目和结论的关系，并与本节的练习题进行比较. 你得到些什么结论，与同学交流.

7.2.2 两条直线的位置关系

要求两条直线的公共点，只要求它们的方程的公共解.

例 1 求两直线 $x-3y-7=0$，$3x+y-1=0$ 的公共点的坐标.

解 $P(x,y)$ 是两条直线的公共点 $\Leftrightarrow$ (x,y) 同时满足两个方程，是方程组

几何:直线的公共点

↓

代数:方程的公共解

$$\begin{cases} x-3y-7=0, & ①\\ 3x+y-1=0 & ② \end{cases}$$

的解.

解这个方程组，得唯一解 $\begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$

两条直线相交，恰有一个公共点$(1,-2)$.

例 2 当 λ 取什么值时，直线 $l_1:2x+(\lambda+1)y=2$ 与 $l_2:\lambda x+y=1$ 相交？平行？重合？垂直？

分析 当然可以通过解方程组 $\begin{cases} 2x+(\lambda+1)y=2, \\ \lambda x+y=1 \end{cases}$ 来判断两条直线相交、平行还是重合. 方程组有唯一解，则两条直线相交；无解，则两条直线平行；有多于一个的解，则两条直线重合.

另一种方法是由两条直线的方向来判断它们的位置关系，不但能判断它们是否相交、平行、重合，还能够判断它们是否垂直.

解 直线的方向由它的法向量方向确定. 本题中两条直线的法向量分别是：$\boldsymbol{n}_1=(2,\lambda+1)$，$\boldsymbol{n}_2=(\lambda,1)$.

l_1，l_2 平行或重合 $\Leftrightarrow$ 法向量 $\boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow (2,\lambda+1) /\!/ (\lambda,1) \Leftrightarrow$

$2\times1-(\lambda+1)\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ 或 -2.

当 $\lambda=1$ 时，两直线方程分别为 $2x+2y=2$ 与 $x+y=1$，两方程各项系数全部成比例，前一个方程可由第二个方程各项乘以 2 得到，两个方程的解完全相同，两条直线重合.

当 $\lambda=-2$ 时，两直线方程分别为 $2x-y=2$ 与 $-2x+y=1$，对应项系数之比 $\frac{2}{-2}=\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{1}$，将两个方程相加，得 $0=3$，可见方程组无解，两条直线平行.

当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时，两直线的法向量不平行，两直线的方向不平行，两直线相交.

两直线 l_1，l_2 垂直 $\Leftrightarrow$ 法向量 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 垂直 $\Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0 \Leftrightarrow$

$$(2,\lambda+1)\cdot(\lambda,1)=2\lambda+\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{3}.$$

一般地，直线 $Ax+By+C=0$ 的方向由它的法向量(A,B)方向确定. 由两条直线的法向量方向之间的关系就可以确定两条直线的位置关系：

判断直线的位置关系，还是用法向量这把钥匙. 你喜欢这把钥匙吗？

两条直线平行或重合 $\Leftrightarrow$ 它们的法向量平行.

两条直线相交 $\Leftrightarrow$ 它们的法向量不平行.

两条直线垂直 $\Leftrightarrow$ 它们的法向量垂直（内积为 0）.

两直线的夹角 α 的大小规定在 $0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$的范围内，因此当法向量的夹角 θ 满足 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$时，$\alpha=\theta$；当法向量的夹角 $\theta>\dfrac{\pi}{2}$时，$\alpha=\pi-\theta$.

因此，关于两条直线的位置关系，我们有：

定理 2 设直线 l_1，l_2 的方程分别为

$$l_1：A_1x+B_1y+C_1=0，l_2：A_2x+B_2y+C_2=0，$$

则

$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow \text{存在实数 } \lambda\neq0，\text{使} \begin{cases} A_2=\lambda A_1, \\ B_2=\lambda B_1, \\ C_2=\lambda C_1. \end{cases}$$

$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 平行} \Leftrightarrow \text{存在实数 } \lambda\neq0，\text{使} \begin{cases} A_2=\lambda A_1, \\ B_2=\lambda B_1, \\ C_2\neq\lambda C_1. \end{cases}$$

l_1 与 l_2 相交 $\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1\neq0$.

l_1 与 l_2 垂直 $\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$.

l_1 与 l_2 的夹角 θ 的余弦 $\cos\theta=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

例 3 已知直线

$$l_1：x+y+3=0，l_2：2x+2y+6=0，$$

$$l_3：x-y+3=0，l_4：4x-4y+6=0.$$

（1）这些直线中是否有两条直线平行、重合、垂直？

（2）求直线 l_1 与直线 l_5：$x-3y-1=0$ 的夹角的余弦.

温故而知新

4. 已知直线 l 与直线 l_1：$x-2y-9=0$ 垂直，且与直线 l_2：$2x-3y-4=0$ 相交于点$(5,2)$，求直线 l 的方程.

5. 已知直线 l_1：$\sqrt{3}x+y=0$ 与直线 l_2：$ax-y+1=0$ 的夹角为 $60°$，求 a 的值.

6. 若直线 l_1：$x-y+k+2=0$ 与直线 l_2：$2x+y-4=0$ 的交点在第一象限内，求 k 的取值范围.

7.2.3 点到直线的距离

例 1 如图 7-12，已知△ABC 三个顶点的坐标分别为 $A(-1,1)$，$B(2,0)$，$C(3,4)$.

(1) 求 AB 边上的高 CD 的长；

(2) 求△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}$.

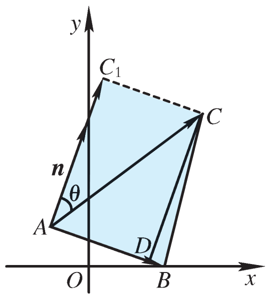


图 7-12

分析 D 是过 C 作 AB 的垂线与 AB 的交点. 一种方法是先求出直线 AB 及 CD 的方程，通过解方程组求出这两条直线交点 D 的坐标，再用两点距离公式求出$|CD|$.

你不妨试一试. 你觉得这个方法好吗?

利用向量运算可以得到一个更简便的算法：

解 (1) 由$\overrightarrow{AB}=(2-(-1),0-1)=(3,-1)$，知向量 $\boldsymbol{n}=(1,3)$垂直于$\overrightarrow{AB}$，那么就有 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AD}$.

不妨将 $\boldsymbol{n}$ 用从 A 出发的有向线段来表示，则$|CD|$等于$\overrightarrow{AC}$在 $\boldsymbol{n}$ 方向上的投影线段 AC_1 的长度. 记 θ 为$\overrightarrow{AC}$与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角，则

$$|CD|=|AC_1|=\big||AC|\cos\theta\big|$$

$$=\left|\frac{|\boldsymbol{n}||AC|\cos\theta}{|\boldsymbol{n}|}\right|$$

$$=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

$$=\frac{|(1,3)\cdot(3-(-1),4-1)|}{\sqrt{1^2+3^2}}$$

$$=\frac{13}{\sqrt{10}}=\frac{13\sqrt{10}}{10}.$$

(2) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+(-1)^2}\cdot\frac{13}{\sqrt{10}}=\frac{13}{2}.$

事实上，不用先求出$|CD|$，可直接得

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{n}|\cdot|AC_1|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}|=\frac{13}{2}.$

试一试：你能否对$\overrightarrow{AB}=(a_1, b_1)$，$\overrightarrow{AC}=(a_2, b_2)$的一般情形求出$|CD|$和$S_{\triangle ABC}$.

例 1 求的$|CD|$就是 C 点到直线 AB 的距离. 采用类似的方法可以得出任意一点到任意一条直线的距离公式.

例 2 求点 P_1 (x_1, y_1) 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离 d.

解 如图 7-13，从点 P_1 作 l 的垂线，交 l 于点 D，则 $d=|DP_1|$.

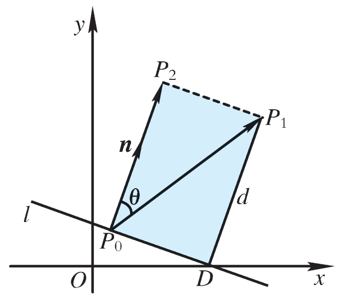


图 7-13

还是法向量这把钥匙！将$\overrightarrow{P_0P_1}$向法向量方向上作投影，就得到了所求距离.

任取直线上一点 P_0 (x_0, y_0)，则 $Ax_0+By_0+C=0$.

不妨将直线 l 的法向量$\boldsymbol{n}=(A, B)$表示成从 P_0 出发的向量. $d=|DP_1|$就是$\overrightarrow{P_0P_1}$在 l 的法向量$\boldsymbol{n}=(A, B)$方向上的投影线段 P_0P_2 的长度. 记 $\boldsymbol{n}$ 与$\overrightarrow{P_0P_1}$的夹角为 θ，则

$$d=|P_0P_2|=||P_0P_1|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

$$=\frac{|(A,B)\cdot(x_1-x_0,y_1-y_0)|}{|(A,B)|}$$

$$=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \quad ①$$

由 $Ax_0+By_0+C=0$，有

$$A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)=(Ax_1+By_1+C)-(Ax_0+By_0+C)$$
$$=Ax_1+By_1+C.$$

代入①，即得

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

这样就得到了

公式 1　点 $P_1(x_1,\ y_1)$到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\quad\text{（点到直线的距离公式）}$$

例 3　(1) 已知直线 l 平行于向量$(3,4)$，且与原点的距离为 2，求 l 的方程；

(2) 求两条平行线 l_1：$3x-4y+5=0$ 与 l_2：$3x-4y-10=0$ 之间的距离.

解　(1) 由$(4,\ -3)\cdot(3,\ 4)=4\times3+(-3)\times4=0$，知非零向量$\boldsymbol{n}=(4,\ -3)$垂直于$(3,\ 4)$，从而是直线 l 的法向量. l 的方程具有形式

$$4x-3y+C=0.$$

它与原点$(0,0)$之间的距离

$$d=\frac{|C|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|C|}{5}.$$

由 $d=2$，得 $|C|=10$，$C=\pm10$. 故所求方程为

$$4x-3y+10=0\quad 或\quad 4x-3y-10=0.$$

(2) 只需在 l_1 上任取一点 $P_1(x_1,y_1)$，求它到 l_2 的距离 d，也就是平行线 l_1，l_2 之间的距离.

方法一　取 $y_1=0$，代入 l_1 的方程解出 $x_1=-\frac{5}{3}$. 点 $P_1\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$到 l_2 的距离为

$$d=\frac{\left|3\times\left(-\frac{5}{3}\right)-4\times0-10\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3.$$

方法二　不用算出(x_1,y_1)，只要知道 $3x_1-4y_1+5=0$ 从而 $3x_1-4y_1=-5$，即可代入距离公式

能否利用例 2(2)的方法二得出求两条平行直线 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax+By+C_2=0$ 之间的距离公式?

$$d=\frac{|3x_1-4y_1-10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}},$$

求出

$$d=\frac{|-5-10|}{5}=3.$$

利用例 1（2）的方法还能得出求三角形和平行四边形面积的公式：

例 4 如图 7-14，在△ABC 中，已知$\overrightarrow{AB}=(a_1, b_1)$，$\overrightarrow{AC}=(a_2, b_2)$.

（1）求△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}$；

（2）求以 AB，AC 为一组邻边的▱$ABEC$ 的面积 S.

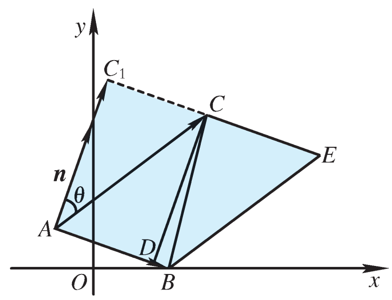


图 7-14

解 向量 $\boldsymbol{n}=(-b_1, a_1)$与$\overrightarrow{AB}=(a_1, b_1)$垂直且长度相等.

△ABC 的底边长 $|AB|$ 和高 $|CD|$ 都会求了，难道还不会算面积吗？

从 A 出发作向量 $\boldsymbol{n}$，设 $\boldsymbol{n}$ 与$\overrightarrow{AC}$的夹角为 θ.

△ABC 中 AB 边上的高 CD 的长度 $|CD|$ 等于$\overrightarrow{AC}$在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影 AC_1 的长度. 于是▱$ABEC$ 的面积

$$\begin{aligned}S&=|AB|\cdot|CD|=|\boldsymbol{n}|\cdot|AC_1|=\big||\boldsymbol{n}|\cdot|AC|\cos\theta\big|\\&=|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}|=|(-b_1, a_1)\cdot(a_2, b_2)|=|a_1b_2-b_1a_2|.\end{aligned}$$

△ABC 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=\frac{1}{2}|a_1b_2-b_1a_2|.$$

为了便于应用，将例 4 的结论总结为

公式 2 以向量(a_1, b_1)，(a_2, b_2)为相邻两边的平行四边形面积为

$$|a_1b_2-b_1a_2| \qquad \text{（平行四边形面积公式）}$$

三角形面积为

$$\frac{1}{2}|a_1b_2-b_1a_2| \qquad \text{（三角形面积公式）}$$

多知道一点

行列式的记号

为了便于记忆，将上述面积公式中的 $a_1b_2-b_1a_2$ 记为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

这个记号称为**二阶行列式.**

在这里，行列式只不过是为了便于记忆而采用的一个记号，你觉得难懂吗？如果觉得难懂，就去记住 $a_1b_2-b_1a_2$ 吧！

行列式是将两个向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 的坐标 (a_1, b_1)，(a_2, b_2) 分别排成两行而得.

将行列式中的四个数交叉相乘（左上角与右下角的数相乘、右上角与左下角的数相乘）：

$$\begin{matrix} a_1 & & b_1 \\ & \times & \\ a_2 & & b_2 \end{matrix}$$

再将两个乘积 a_1b_2 与 b_1a_2 相减，得到行列式的值 $a_1b_2-b_1a_2$.

行列式的值的绝对值就是以它的两行为坐标的两个向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 为一组邻边的平行四边形的面积.

行列式的符号表示从第一行 $\overrightarrow{AB}=(a_1, b_1)$ 到第二行 $\overrightarrow{AC}=(a_2, b_2)$ 的旋转方向：逆时针旋转（即 $0<\angle BAC<\pi$）时行列式为正，顺时针旋转（即 $-\pi<\angle BAC<0$）时行列式为负.

行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (a_1, b_1)\parallel(a_2, b_2)$，此时以 AB，AC 为邻边的“平行四边形”和“三角形”都退化为线段，面积当然为 0.

按照行列式的记法，上述平行四边形面积 $S=\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|$，而三角形面积是它的一半.

例 5 利用面积公式重新计算例 1 中的 $\triangle ABC$ 的面积，其中 A（-1，1），B（2，0），C（3，4）.

解 $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(4,3)$.

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|3\times3-(-1)\times4|=\dfrac{13}{2}$.

练习

1. 求点 $A(3,4)$ 到直线 $2x-3y+6=0$ 的距离.
2. 求两平行直线 $x-2y-2=0$，$2x-4y+3=0$ 之间的距离.
3. 已知直线 l 平行于向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，并且与原点的距离为 3，求直线 l 的方程.
4. 求以 $A(3,4)$，$B(2,-2)$ 及坐标原点 O 为顶点的三角形 ABO 的面积.

习题 4

学而时习之

1. 求点 $A(-3,4)$ 到直线 $3x-2y+6=0$ 的距离.
2. 求两平行直线 $x-3y-2=0$，$2x-6y-3=0$ 之间的距离.
3. 已知直线垂直于直线 $2x-3y-4=0$，并且与点 A（1，1）的距离为 2，求该直线的方程.
4. 求以三点 A（2，2），B（2，-3），C（-3，-1）为顶点的三角形的面积.

温故而知新

5. 求与直线 $x-y-1=0$ 平行且距离为 3 的直线的方程.
6. 已知平行四边形的三个顶点坐标分别为(4,2),(5,7),(-3,4),求这个平行四边

形的面积.

7.* 已知两条平行直线分别过点 $A(6,2)$, $B(-3,-1)$, 并且各自绕点 A, B 旋转，探索这两条平行线之间的距离的变化范围，是否有最大距离？若有，则求出距离最大时的两直线方程.

数学建模

道路的坡度与运动的速度

一、道路的坡度

交通工程上一般用“坡度”来描述一段道路对于水平方向的倾斜程度.

如图 7-15，沿着这条道路从 A 点前进到 B 点，在水平方向前进的距离为 AD，竖直方向上升的高度为 DB（如果是下降，则 DB 的值为负实数），则

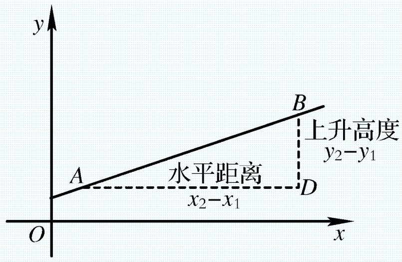


图 7-15

$$\text{坡度 } k=\frac{\text{上升高度}}{\text{水平距离}}=\frac{DB}{AD}=\tan\angle DAB.$$

坡度 $k>0$ 表示这段道路是上坡，k 值越大上坡越陡，如果 k 太大，车辆就爬不上去，还容易出事故. $k=0$ 表示是平路. $k<0$ 表示下坡，$|k|$ 越大说明下坡越陡，$|k|$ 太大也容易出事故.

如果在过 AB 的竖直平面上建立直角坐标系，使 AD 方向为 x 轴正方向，竖直向上的方向为 y 轴正方向. 设 A，B 的坐标分别是 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$\text{水平距离}=x_2-x_1，\text{上升高度}=y_2-y_1，$$

$$\text{坡度 } k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

二、运动的速度

一列火车在京九铁路上行驶. 设在某天中午 12 点之后 x 小时火车离北京站的路程为 y 千米，则 y 是 x 的函数. 设当 $x=x_1$ 时

$y=y_1$，$x=x_2$ 时 $y=y_2$，则 x_2-x_1 就是从时刻 x_1 到 x_2 所经过的时间，y_2-y_1 就是这段时间内火车走过的路程．它们之间的比

$$v=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

就是这段时间内火车的平均速度．

假如在当天下午 1 点到 3 点（即 $1\leqslant x\leqslant 3$）这段时间内 y 与 x 之间的函数关系是某个一次函数 $y=kx+b$，它的图象是一段直线．则从 1 点到 3 点之间任一段时间 $[x_1, x_2]$ 内的平均速度

$$v=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(kx_2+b)-(kx_1+b)}{x_2-x_1}=k.$$

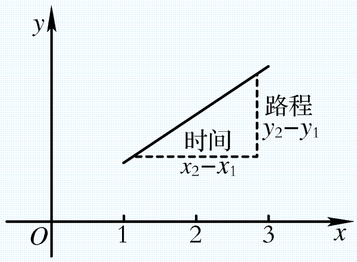


图 7-16

也就是说，从 1 点到 3 点之间任一段时间内的平均速度都相同，等于常数 k．因此可以认为 k 就是 1 点到 3 点这段时间内每一个时刻的速度，这段时间内火车的运动是速度为 k 的匀速运动．这个速度也就是它的图象的“坡度”．k 的绝对值 $|k|$ 描述了火车运动的快慢，k 的符号描述了火车运动的方向：当 $k>0$ 时驶离北京站，$k<0$ 时驶向北京站．

7.2.4 直线的斜率

在7.2.1节到7.2.3节中，以向量为工具解决了利用直线方程研究直线的有关问题．本节提供了不依赖于向量而利用几何知识处理直线方程及两条直线的位置关系的方法．

我们已经知道直线 $l: Ax+By+C=0$ 的一次项系数组成的向量 (A,B) 的方向是与直线垂直的方向——法向量方向．法向量方向间接地描述了直线的方向，可以用来建立直线的方程，判定直线的相互位置关系（平行，垂直，夹角等）．

但是，描述直线的方向还有更直接的方式．比如，以水平方向（x 轴的方向）为基准，通过描述直线对于水平方向的“倾斜程度”来描述直线的方向．

怎样描述这个“倾斜程度”？

一种方式是指明直线的**倾斜角**（angle of inclination）．当直线 l 与 x 轴相交时，它的倾斜角 α 就是 x 轴绕交点沿逆时针方向旋转到与直线重合时所转的最小正角，如图 7-17．当直线与 x 轴平行或重合时，规定倾斜角 $\alpha=0$．因此，$0\leqslant\alpha<\pi$．

另一种方式是用直线的斜率来描述倾斜程度．当直线 l 的倾斜角 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，我们将 α 的正切 $\tan\alpha$ 定义为这条直线的**斜率**（slope）．前面的数学建模中所说的道路的坡度，以及路程与时间的函数图象的“坡度”，就是斜率．

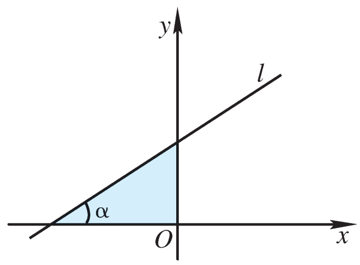


图 7-17

注意当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，即直线垂直于 x 轴，也就是平行或重合于 y 轴时，直线没有斜率．

例 1 设直线 l 不垂直于 x 轴．已知直线上任意两个不同的点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，求直线的斜率．

解 设直线 l_{AB} 的倾斜角为 α，斜率为 $k=\tan\alpha$．

由于 l 不垂直于 x 轴，$x_1\neq x_2$．

先考虑 $y_2>y_1$ 的情形，如图 7-18．

过点 A 作直线 $p_1\parallel x$ 轴，过点 B 作直线 $p_2\parallel y$ 轴，p_1 与 p_2 相

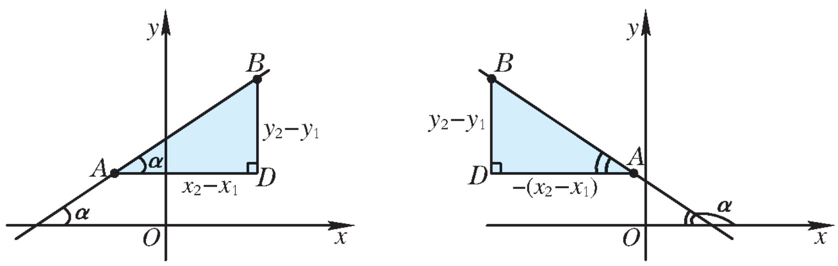


图 7-18

交于点 D，则△ADB 是直角三角形.

$$\tan\angle DAB=\frac{|DB|}{|AD|}=\frac{y_2-y_1}{|x_2-x_1|}.$$

当 $x_2>x_1$ 时，$\alpha=\angle DAB$，$|x_2-x_1|=x_2-x_1$，

$$k=\tan\alpha=\tan\angle DAB=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

当 $x_2<x_1$ 时，$\alpha=\pi-\angle DAB$，$|x_2-x_1|=-(x_2-x_1)$，

$$k=\tan\alpha=\tan(\pi-\angle DAB)=-\frac{y_2-y_1}{|x_2-x_1|}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

当 $y_2<y_1$ 时，由前面所得的结论知道直线 l_{BA} 的斜率

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

当 $y_1=y_2$ 时，l 平行于 x 轴，倾斜角 $\alpha=0$，斜率 $k=\tan\alpha=0$.

此时 $y_2-y_1=0$，

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

仍成立.

因此，在各种情况下，都有

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

例 1 得到的结果可以作为公式来使用：

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ （已知直线上两点坐标求斜率的公式）

例 2 求直线 l：$y=kx+b$ 的斜率.

解 任取 $x_1\neq x_2$，则 $A(x_1,kx_1+b)$，$B(x_2,kx_2+b)$是直线 l 上两

在前面的数学建模中已经看到：如果 x 代表时刻，y 代表运动物体这一时刻在运动路线上的位置，则斜率代表物体运动的速度．对一般的一次函数 $y=kx+b$，斜率 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 描述了 y 随 x 变化的快慢，称为这个函数的**变化率**．因此，斜率对于研究一次函数至关重要．

个不同的点．由例 1 推出的直线斜率公式知 l 的斜率

$$k_l=\frac{(kx_2+b)-(kx_1+b)}{x_2-x_1}=k.$$

例 2 的结论可以作为定理来使用：

定理 3 直线 $y=kx+b$ 的斜率等于 k．

例 3 当 $B\neq0$ 时求直线 $Ax+By+C=0$ 的斜率．

解 方程 $Ax+By+C=0$ 可化为 $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$ 的形式，因此它的斜率为 $-\dfrac{A}{B}$．

例 4 设直线 l 不垂直于 x 轴，斜率为 k 且经过点 $P_0(x_0,y_0)$．求这条直线 l 的方程．

解 设 $P(x,y)$ 是 l 上任意一点．

当 P 与 P_0 不重合时，

$$P\text{ 在直线 } l \text{ 上} \Leftrightarrow \text{直线 } P_0P \text{ 与 } l \text{ 重合} \Leftrightarrow$$

$$k=k_{P_0P}=\frac{y-y_0}{x-x_0} \Leftrightarrow$$

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad ①$$

当 P 与 P_0 重合时，$x-x_0=y-y_0=0$，$y-y_0=k(x-x_0)$ 仍成立．

因此，①就是所求直线 l 的方程．

例 4 中由直线的斜率 k 及直线上一点的坐标 (x_0,y_0) 所求出的直线方程

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

称为直线的**点斜式方程**（equation of point slope form）．

点斜式方程可以进一步化为 $y=kx+b$ 的形式，其中 b 是常数．易见 b 就是 $x=0$ 时的 y 值，也就是直线与 y 轴交点的纵坐标．

一般地，直线 l 与 y 轴的交点 $(0,b)$ 的纵坐标 b 称为 l 在 y 轴上的**截距**（intercept），l 与 x 轴的交点 $(a,0)$ 的横坐标 a 称为 l 在 x 轴上的截距．

如果已经知道直线 l 的斜率 k 及其在 y 轴上的截距 b，则直线经过点 $(0,b)$，直线 l 的点斜式方程为 $y-b=k(x-0)$，即 $y=kx+b$．

斜率为 k、在 y 轴上的截距为 b 的直线的方程

$$y=kx+b$$

称为直线的**斜截式方程**（equation of slope intercept form）.

由斜截式方程可知：只要知道了直线的斜率 k，则直线的方程具有形式 $y=kx+b$，其中 b 是待定常数. 如果还知道直线经过点 (x_0, y_0)，将这一点的坐标代入直线方程即可求出 b，从而得出直线方程.

以上通过斜率来求直线方程的方法都没有用到向量. 但有关斜率的问题也可以用向量来处理.

直线的斜截式方程比点斜式方程更容易记住. 实际上，斜截式方程也就是一次函数的标准表达式，你在学习初中数学时早就记住了. 因此，不需要死记点斜式方程，可以直接由直线的斜截式方程推出点斜式方程来.

例 5 设直线 l 的斜率为 k. 求证：向量 $(1,k)$ 平行于 l.

解法一 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是直线上任意两个不同的点. 则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)\,/\!/\left(1,\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right),$$

而 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$，所以 $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,(1,k)$，即 $l\,/\!/\,(1,k)$.

解法一用到了已知直线上两点坐标求斜率的公式. 解法二没有用到这个公式，因此可以反过来推出这个公式.
想一想怎样推？

解法二 设 l 的倾斜角为 α. 从原点 O 出发作非零有向线段 OP 使 x 轴的非负半轴 Ox 绕原点 O 沿逆时针方向旋转角 α 后与射线 OP 重合，如图 7-19. 则 $\overrightarrow{OP}\,/\!/\,l$. 点 P 的坐标 (a,b) 也就是向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标. 且由 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 知 $a\neq 0$. 于是

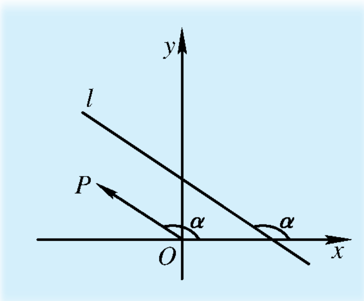


图 7-19

$$k=\tan\alpha=\frac{b}{a},\quad l\,/\!/\,\overrightarrow{OP}=(a,b)\,/\!/\left(1,\frac{b}{a}\right)=(1,k).$$

如果非零向量 $\boldsymbol{v}=(a,b)$ 平行于直线 l（也就是平行于直线上任意两个不同点之间的有向线段所代表的向量），就称 $\boldsymbol{v}$ 是 l 的**方向向量**.

向量 $\boldsymbol{v}$ 平行于直线 l，是指直线上任意两个不同点之间的有向线段所代表的向量平行于 $\boldsymbol{v}$.

这样，例 5 的结论就是：只要知道了直线的斜率 k，就知道了 $(1, k)$ 是这条直线的方向向量. 由此立即知道 $(k, -1)$ 是直线的法向量，因而直线的一般式方程具有 $kx-y+b=0$ 的形式，立即得出斜截式方程 $y=kx+b$.

法向量这把钥匙还是有效.

例 6 已知直线 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$.

（1）求直线 l_1，l_2 平行、垂直的条件.

如果你熟悉向量的运算，可通过讨论向量 $(1,k_1)$，$(1,k_2)$ 之间的位置关系来讨论直线 l_1，l_2 之间的位置关系，而不需采用例 6 的方法．试将这两种方法进行比较，你更喜欢哪一种？

（2）设 l_1 与 l_2 相交，θ 是直线 l_1 绕交点沿逆时针方向旋转到与 l_2 重合时所转的最小正角，当 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ 时求 $\tan\theta$.

解　设直线 l_1，l_2 的倾斜角分别是 α_1，α_2. 则 $\tan\alpha_1=k_1$，$\tan\alpha_2=k_2$.

为了便于讨论，当 l_1 与 l_2 相交时，过原点 O 作直线 l_1' 与 l_1 平行或重合，l_2' 与 l_2 平行或重合．则 l_1' 与 l_1 的倾斜角同为 α_1，斜率同为 k_1．同样地，l_2' 与 l_2 的倾斜角及斜率都相同，分别为 α_2，k_2．l_1' 绕原点 O 沿逆时针方向旋转到与 l_2' 重合时所转的最小正角也等于 θ．由此易见 $\theta=\alpha_2-\alpha_1$（当 $\alpha_2\geqslant\alpha_1$）或 $\theta=\alpha_2-\alpha_1+\pi$（当 $\alpha_2<\alpha_1$）（如图 7-20 所示）．当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 $l_1\perp l_2$.

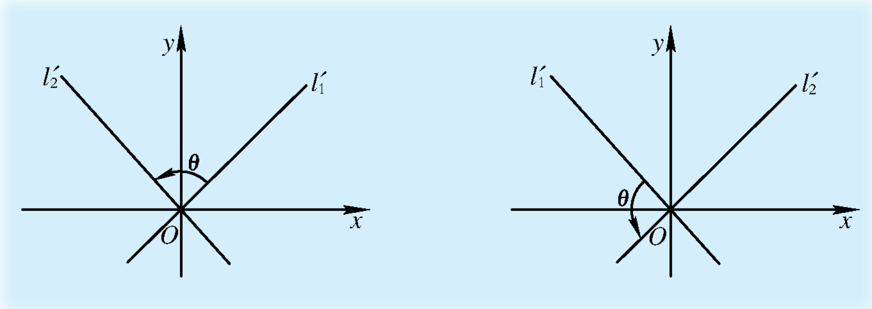


图 7-20

（1）$l_1 /\!/ l_2 \iff \alpha_1=\alpha_2$ 且 l_1 与 l_2 不重合 $\iff k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$；

$$l_1\perp l_2 \iff \alpha_2=\alpha_1\pm\frac{\pi}{2} \iff \tan\alpha_2=-\cot\alpha_1=-\frac{1}{\tan\alpha_1}$$

$$\iff k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

（2）$\theta=\alpha_2-\alpha_1$ 或 $\theta=\alpha_2-\alpha_1+\pi$．在两种情形下都有

$$\tan\theta=\tan(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

练　习

1. 直线 $3x-2y+6=0$ 的斜率是__________.

2. 直线的斜率为 2，且过点 $(2,3)$，求该直线的方程.

3. 一直线 l 经过点 $(3,2)$，倾斜角是 $x-\sqrt{3}y+3=0$ 的倾斜角的 2 倍，求直线 l 的

方程.

4. 已知直线 l 经过两点 $A(2,3)$，$B(3,2)$，求直线 l 的方程.

习题 5

学而时习之

1. 一直线的倾斜角为 60°，且过点$(-2,2)$，求该直线方程.
2. 求与直线 $y=\frac{3}{2}x+3$ 平行，过点 $(3,-1)$ 的直线方程.
3. 求与直线 $y=\frac{3}{4}x-3$ 垂直，且过原点的直线方程.
4. 已知直线经过两个不同的点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，求这条直线的方程.
5. 已知直线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 a，b $(ab\neq 0)$，求证：直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

第 4 题得到的就是两点式方程.

第 5 题所得的方程称为直线的截距式方程.

温故而知新

6. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $|AB|=|AC|$，$\angle A=120°$，$A(0,2)$，BC 所在的直线方程是 $y=\sqrt{3}x-1$，求三边所在的直线的倾斜角，并求其余两边所在直线的方程.
7. 已知正方形中心的坐标是 $(1,1)$，一边所在的直线方程是 $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$，求其余三边所在的直线方程.
8. 已知过点 P 的直线 l 绕点 P 按顺时针方向旋转 α 角 $(0°<\alpha<90°)$ 后所得直线为 $y=x-2$，若继续绕点 P 按顺时针方向旋转 $90°-\alpha$ 角后得到直线为 $y=-2x+1$，求直线 l 的方程.
9. 利用直线的方向向量之间的关系，求直线 l_1：$y=k_1x+b_1$ 与直线 l_2：$y=k_2x+b_2$ 平行、重合、相交、垂直的条件，以及 l_1，l_2 的夹角 θ 的余弦.

7.3 圆与方程

7.3.1 圆的标准方程

圆（circle）是我们的日常生活经常见到的图形.

用圆规画圆时，圆规的两只脚之间的距离保持不变，一只脚上安置的针插在纸上保持不动，另一只脚安置的笔旋转一圈就画出一个圆.

圆是在平面上到一个固定点的距离等于一个固定长度的所有的点组成的集合. 这个固定的点就是圆心（center）. 这个固定的长度就是半径. 给定了圆心和半径，就确定了这个圆.

圆的半径是一个正实数.

在平面上建立直角坐标系，则圆心可以用它的坐标表示. 给定圆心 C 的坐标(a,b)和半径 r，就确定了一个圆(如图 7-21). 我们来求这个圆的方程，也就是求圆周上点 P 的坐标 (x, y) 满足的条件.

P 在圆周上 $\Leftrightarrow |CP|=r$.

但$|CP|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.

故 $P(x,y)$在圆周上 $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Leftrightarrow$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

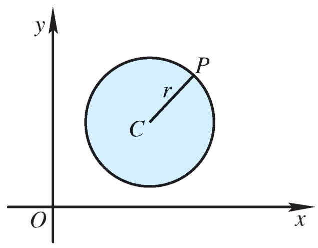


图 7-21

这就得到了

定理 4 圆心为点 (a, b)、半径为 r 的圆的方程为

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

我们称之为圆的标准方程（standard equation of circle）.

特别地，圆心在原点 $(0, 0)$，半径为 r 的圆的方程为

$$x^2+y^2=r^2.$$

例 1 求以 $C(3,5)$为圆心且经过原点的圆的方程.

解 圆的半径 $r=|CO|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$，故所求方程为

$$(x-3)^2+(y-5)^2=34.$$

例 2 已知某圆经过两点 $A(6,0)$，$B(-2,2)$，圆心在直线 $2x-y=1$ 上，求该圆的方程.

解 圆心 C 到 A，B 距离相等（等于半径），因此圆心在 AB 的垂直平分线 l 上，并且就是 l 与直线 $2x-y=1$ 的交点.

先求 l 的方程. l 经过 AB 的中点 M，M 的坐标为 $\left(\frac{6-2}{2},\frac{0+2}{2}\right)=(2,1)$. 又 $\overrightarrow{BA}=(6-(-2),0-2)=(8,-2)$ 垂直于 l，是 l 的法向量. 因此 l 的方程具有形式 $8x-2y+c=0$. 将 $(2,1)$ 代入得 $8\times2-2\times1+c=0$，$c=-14$. 所以 l 的方程为 $8x-2y-14=0$，即 $4x-y=7$.

解方程组 $\begin{cases}2x-y=1,\\4x-y=7,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\y=5.\end{cases}$ 故圆心坐标为 $(3,5)$.

圆的方程具有形式

$$(x-3)^2+(y-5)^2=r^2.$$

将 A 点坐标代入得 $(6-3)^2+(0-5)^2=r^2$，$r^2=34$. 故所求的圆的方程为

$$(x-3)^2+(y-5)^2=34.$$

练 习

写出下列各圆的方程：

(1) 圆心在原点的单位圆；

(2) 圆心在点 $(1,2)$，半径是 5；

(3) 圆心在点 $(1,2)$，经过点 $(2,1)$；

(4) 圆心在 x 轴上，经过两点 $(2,5)$ 与 $(6,5)$.

7.3.2 圆的一般方程

我们已经学过二元一次方程表示直线，下列二元二次方程表示什么呢？

（1）$x^2+y^2+2x-4y-2=0$；

（2）$(x+1)^2+(y-2)^2=7$.

（1）没学过，暂时不知道图象是什么.

可以取 x 的一些值，比如 $x=-2$，-1，0，1，2，…，代入方程求出对应的 y 值，得出图象上的一些点，描点连成光滑曲线，看它的图象是什么.

对任何一个二元方程都可以用这个方法来画它的图象.

还有没有更好的办法？留待进一步研究.

（2）这是以（-1，2）为圆心、$\sqrt{7}$为半径的圆.

如果将（2）的方程展开，即得 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=7$，也就是 $x^2+y^2+2x-4y-2=0$，这正是(1)的方程. 可见(1)的方程实质上与(2)相同，其图象与(2)的相同，仍是以(-1，2)为圆心、$\sqrt{7}$为半径的圆. 只不过(2)的方程是圆的标准方程的形式，一看就知道它的图象，而将它展开成(1)的样子我们就不认识了，不知道它的图象是什么.

既然(2)的方程可以展开整理成(1)的形式，能不能反过来将(1)的方程变回(2)的形式，成为圆的标准方程，从而立即知道它的图象的形状呢？

$(x+1)^2$ [illegible] 2)^2 展开产生 [illegible] 方程中的一 [illegible] 来，怎样“消 [illegible] 程的一次 [illegible] 方法！

让我们来试一试.

将方程 $x^2+y^2+2x-4y-2=0$ 左边的多项式按字母 x 和 y 分别配方，得

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+2x-4y-2 &=(x^2+2x)+(y^2-4y)-2\\
&=(x+1)^2+(y-2)^2-5-2\\
&=(x+1)^2+(y-2)^2-7.
\end{aligned}
$$

问题 [illegible] 中学过的配方法原来如此有用！

老办法解决新问题，划算！

学得少一点，用得尽量多，既能多解决问题，又减轻学习负担.

于是方程 $x^2+y^2+2x-4y-2=0$ 实际上就是 $(x+1)^2+(y-2)^2-7=0$，即 $(x+1)^2+(y-2)^2=7$. 这是圆的标准方程，其图象是以

$(-1,2)$为圆心、$\sqrt{7}$为半径的圆.

例 1 下列方程的图象是否是圆？如果是，求出它的圆心和半径.

(1) $3x^2+3y^2-2x=0$； (2) $x^2+y^2-6x+8y+25=0$；

(3) $x^2+y^2-6x+25=0$； (4) $3x^2+11xy+6y^2=0$.

解 (1) 注意到圆的标准方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 展开之后的 x^2，y^2 的系数都等于 1. 本方程 x^2，y^2 的系数都不是 1，但二者相等，都是 3. 方程两边同除以 3 就可以都化为 1.

原方程两边同除以 3 化为 $x^2+y^2-\frac{2}{3}x=0$. 左边配方化为

$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2-\frac{1}{9}=0$，即$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

这是圆的标准方程，其图象是以$\left(\frac{1}{3}，0\right)$为圆心、$\frac{1}{3}$为半径的圆.

(2) 左边配方得$(x-3)^2+(y+4)^2=0$. 方程左边$\geqslant 0$，只有当 $x-3=0$ 且 $y+4=0$ 时才能等于零. 方程只有一个解$\begin{cases}x=3,\\y=-4.\end{cases}$图象由一个点$(3，-4)$组成，不是圆.（按圆的标准方程，这是以$(3，-4)$为圆心、0 为半径的“圆”，已经退化为一个点而不再是圆.）

(3) 左边配方得 $(x-3)^2+y^2+16=0$，即 $(x-3)^2+y^2=-16$. 不论 x，y 取什么实数值，方程左边总是大于或等于 0，不可能等于-16. 因此，方程无解，图象是空集，不是圆.

(4) 注意到圆的标准方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 展开整理后为 $x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0$，不含 xy 项，而且 x^2，y^2 的系数应相等. 本题中的方程不是这样，因此肯定不是圆.

实际上，可以将方程左边分解因式，化为

$$(x+3y)(3x+2y)=0 \Leftrightarrow x+3y=0 \text{ 或 } 3x+2y=0.$$

$x+3y=0$ 的解或 $3x+2y=0$ 的解都是$(x+3y)(3x+2y)=0$ 的解，除此之外没有其他的解. 因此本题方程的图象就是 $x+3y=0$ 和 $3x+2y=0$ 的图象（两条直线）凑到一起组成的.

一般地，将圆的标准方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 展开整理之后，可化为 $x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0$，具有形式

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

其中 $D=-2a$，$E=-2b$，$F=a^2+b^2-r^2$ 是常数.

这种形式的方程称为**圆的一般方程**（general equation of circle）.

注意这是 x，y 的二元二次方程，并且有两个特点：

（1）x^2，y^2 的系数都等于 1；

（2）没有 xy 项.

反过来，如果二元二次方程具有以上两个特点，即具有形式

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \qquad ①$$

将方程①左边配方，再将常数项移到右边，化为

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4} \qquad ②$$

的形式.

这个公式不需记住，只要会用配方法将一般方程化为标准方程就可以.

当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程②无实数解，图象是空集.

当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程②有唯一解 $\begin{cases}x=-\dfrac{D}{2},\\ y=-\dfrac{E}{2},\end{cases}$ 图象是一个点 $\left(-\dfrac{D}{2},\ -\dfrac{E}{2}\right)$.

只有当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程②才是圆的标准方程，图象是以 $\left(-\dfrac{D}{2},\ -\dfrac{E}{2}\right)$ 为圆心、$\dfrac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$ 为半径的圆，这也就是方程①的图象.

因此，并非所有的 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 都是圆的一般方程. 只有当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，才是圆的一般方程.

想一想，方程 $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$（$A\neq0$）的图象是什么？

要确定圆的一般方程，只要求出其中的三个系数 D，E，F 就可以了.

例 2 已知 A（0，0），B（6，0），C（−1，7）. 求△ABC 的外接圆的圆心坐标和半径.

解 外接圆也就是经过这三点的圆. 设它的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. 将三点的坐标代入，得到关于 D，E，F 的方程组

$$\begin{cases}F=0,\\36+6D+F=0,\\50-D+7E+F=0.\end{cases}$$

由第一个方程已有 $F=0$，代入第二个方程解出 $D=-6$，再代入第三个方程解得 $E=-8$.

于是圆的方程为 $x^2+y^2-6x-8y=0$. 配方化为标准方程 $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$.

所以，圆心坐标为（3，4），半径为 5.

想一想，能否通过求 AB 和 AC 的垂直平分线的交点找出圆心坐标，用距离公式求半径？与这里的解法相比，哪个更简便？

练 习

1. 判断下列方程的图象是否为圆？如果是，求出它的圆心坐标和半径.

（1）$x^2+y^2+2x+4y+1=0$；（2）$5x^2+5y^2+2x+4y+1=0$；

（3）$-5x^2-5y^2+2x+2y+1=0$；（4）$x^2+y^2+2x+4y+5=0$.

2. 求过三点 $A(1,0)$，$B(2,1)$，$C(-2,3)$ 的圆的方程，并指出这个圆的半径和圆心坐标.

3. 试判断四点 $A(1,0)$，$B(2,1)$，$C(-2,3)$，$D(-2,1)$ 是否共圆？并说明理由.

7.3.3 直线与圆、圆与圆的位置关系

一、直线与圆的位置关系

在平面几何中知道，平面上的任意一条直线 l 与一个圆 C 有三种位置关系：

（1）相交，直线与圆恰有两个公共点；

（2）相切，直线与圆恰有一个公共点；

（3）相离，直线与圆没有公共点.

直线与圆到底是哪一种位置关系，取决于圆心与直线的距离的大小. 设圆的半径为 r，圆心与直线的距离为 d（如图 7-22），则

（1）直线与圆相交 $\Leftrightarrow$ $d<r$；

（2）直线与圆相切 $\Leftrightarrow$ $d=r$；

（3）直线与圆相离 $\Leftrightarrow$ $d>r$.

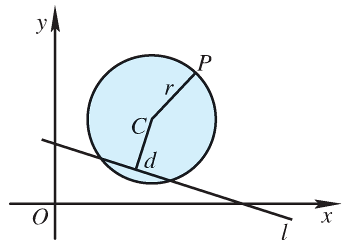


图 7-22

在平面上建立直角坐标系之后，直线用二元一次方程 $Ax+By+C=0$ 表示，圆用二元二次方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示. 有两种方法可以判别直线和圆的位置关系：

（1）直线与圆的公共点的坐标就是它们的方程的公共解，也就是方程组

$$\begin{cases}Ax+By+C=0,\\x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\end{cases}$$

的解. 知道了解的个数也就知道了公共点的个数，从而可以判定直线和圆的位置关系. 特别是：通过直线方程用代入法可在圆方程中消去一个未知数，化为一元二次方程，它的实数解的个数可以由判别式来判别.

（2）由圆的方程可以算出圆心坐标和半径，因而可以用点到直线的距离公式算出圆心到直线的距离 d，再与半径比较，判别直线和圆的位置关系.

例 1 判断圆 $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ 与下列直线的位置关系：

（1）$x+y=5$； （2）$x-y+5=0$； （3）$4x+3y=24$.

解 将圆方程通过配方化为标准方程

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25.$$

可知它的圆心 C 的坐标为 $(2,\ -3)$，半径 $r=5$.

（1）直线方程为 $x+y-5=0$. 此直线与圆心 $(2,\ -3)$ 的距离

$$d=\frac{|2-3-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}<5,$$

此直线与圆相交.

（2）直线与圆心的距离

$$d=\frac{|2-(-3)+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=5\sqrt{2}>5,$$

此直线与圆相离.

（3）直线方程为 $4x+3y-24=0$. 此直线与圆心的距离

$$d=\frac{|4\times2+3\times(-3)-24|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5=r,$$

此直线与圆相切.

例 2 k 取什么值时，圆 $x^2+y^2=5$ 与直线 $y=kx+5$ 相切？

解法一 圆心(0，0) 到直线 $kx-y+5=0$ 的距离

$$d=\frac{5}{\sqrt{1+k^2}}.$$

圆与直线相切 $\Leftrightarrow d=\dfrac{5}{\sqrt{1+k^2}}=r=\sqrt{5} \Leftrightarrow 1+k^2=5 \Leftrightarrow k=\pm2$.

解法二 将直线方程代入圆方程，得 $x^2+(kx+5)^2=5$，即

$$(1+k^2)x^2+10kx+20=0. \qquad ①$$

其判别式 $\Delta=(10k)^2-4\times20(1+k^2)=20k^2-80$.

圆与直线相切 $\Leftrightarrow$ 方程①有唯一解

$$\Leftrightarrow \Delta=20k^2-80=0 \Leftrightarrow k=\pm2.$$

例 3 设 $A(x_0,y_0)$是圆 C：$x^2+y^2=r^2$ 上一点. 求过点 A 且与圆 C 相切的直线方程.

解 如图 7-23 所示，所求直线垂直于过切点 A 的半径 OA，因此$\overrightarrow{OA}=(x_0,y_0)$是直线的法向量. 直线方程具有形式

$$x_0x+y_0y=c, \qquad ①$$

c 是待定常数. A 在直线上，将其坐标 (x_0, y_0) 代入直线方程①，得

$$c=x_0^2+y_0^2.$$

但 $A(x_0,y_0)$又在圆上，其坐标适合圆方程，即

$$c=x_0^2+y_0^2=r^2.$$

故所求切线的直线方程为

$$x_0x+y_0y=r^2.$$

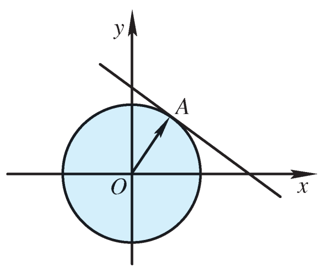


图 7-23

半径$\overrightarrow{OA}$是切线的法向量，立即得到切线方程的一次项系数，岂不快哉！

如果用斜率来解，需要对 $x_0=0$ 或 $y_0=0$ 的情形单独讨论，你喜欢吗？

练 习

1. 若直线 $x+y=m$ 与圆 $x^2+y^2=m$ 相切，求 m 的值.
2. 求平行于直线 $2x-y+1=0$ 且与圆 $x^2+y^2=5$ 相切的直线方程.
3. 自点 $P(6,\ -4)$ 向圆 $x^2+y^2=20$ 引割线，所得的弦长为 $6\sqrt{2}$，求这割线所在的直线方程.

二、圆与圆的位置关系

设两圆的半径分别是 R，r（不妨设 $R\geqslant r$），两圆圆心的距离为 d，则两圆有如下位置关系：

（1）$d>R+r$，两圆外离，无公共点；

（2）$d=R+r$，两圆外切，一个公共点；

（3）$R-r<d<R+r$，两圆相交，两个公共点；

（4）$d=R-r>0$，两圆内切，一个公共点；

（5）$d<R-r$，大圆内含小圆，无公共点；

（6）$d=0$，两圆同心.（当 $R=r$ 时两圆重合）.

给出了两圆的方程之后，就知道了两圆的半径 R，r 及圆心坐标，并可根据圆心坐标算出两圆心之间的距离 d. 由 d 的大小就可以判断两圆具有上述哪种位置关系.

例 4 证明两圆 C_1：$x^2+y^2+2y-4=0$ 与 C_2：$x^2+y^2-4x-16=0$内切，并求它们的公切线方程.

解 将圆 C_1 的方程化为标准方程 $x^2+(y+1)^2=5$，则圆心坐标为 $(0,\ -1)$，半径 $r_1=\sqrt{5}$.

将圆 C_2 的方程化为标准方程 $(x-2)^2+y^2=20$，则圆心坐标为 $(2,\ 0)$，半径 $r_2=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

两圆心之间的距离 $d=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}=r_2-r_1$，这就证明了两圆内切.

为了求公切线方程，需要求切点坐标．切点是两圆唯一的公共点，其坐标即方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y-4=0, & ① \\ x^2+y^2-4x-16=0 & ② \end{cases}$$

的解．

①－②，得 $4x+2y+12=0$， ③

即 $y=-2x-6$． ④

代入②，得 $x^2+(-2x-6)^2-4x-16=0$，

化简，得 $x^2+4x+4=0$．

该方程有唯一解 $x=-2$，代入④，得 $y=-2\times(-2)-6=-2$．

这就求出了切点 $A(-2,-2)$．

从圆 C_2 的圆心到 A 的向量 $(-2-2,-2-0)=(-4,-2)$ 与切线垂直，是切线的法向量．它的实数倍（2，1）也是法向量．故切线方程具有形式 $2x+y+c=0$．将切点坐标 $(-2,-2)$ 代入，得 $2(-2)-2+c=0$，$c=6$．

故切线方程为 $2x+y+6=0$．

求出的切线方程不就是③式吗？③式后面的运算是否都可以免去？这个问题值得思考．

例 5 已知圆 C_1：$x^2+y^2+x+2y-3=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-6=0$ 相交．求经过 C_1，C_2 的交点的直线方程．

解 先通过解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+2y-3=0, & ① \\ x^2+y^2-6=0 & ② \end{cases}$$

求两圆 C_1，C_2 的交点的坐标．

①－②，得 $x+2y+3=0$， ③

$x=-2y-3$． ④

代入②，得 $(-2y-3)^2+y^2=6$，

即 $5y^2+12y+3=0$．

解之得 $y_1=\dfrac{-6+\sqrt{21}}{5}$， $y_2=\dfrac{-6-\sqrt{21}}{5}$．

分别代入④，得

$$x_1=\frac{-3-2\sqrt{21}}{5},\quad x_2=\frac{-3+2\sqrt{21}}{5}.$$

故两个交点为

$$A\left(\frac{-3-2\sqrt{21}}{5},\frac{-6+\sqrt{21}}{5}\right),\quad B\left(\frac{-3+2\sqrt{21}}{5},\frac{-6-\sqrt{21}}{5}\right).$$

而向量$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{4\sqrt{21}}{5},\ -\frac{2\sqrt{21}}{5}\right)/\!/(2,\ -1)$.

故直线 AB 有法向量（1，2），直线方程具有形式 $x+2y+c=0$.

将 A 的坐标代入直线 AB 的方程，得

$$\frac{-3-2\sqrt{21}}{5}+\frac{-12+2\sqrt{21}}{5}+c=0,\qquad c=3.$$

故所求直线方程为 $x+2y+3=0$.

经过繁琐的计算，最后得到的竟然是早就得到过的③式．想不想把这些繁琐的计算通通免去？能不能一开始就直接断定③就是所求的直线方程？先自己想一想，我们在后面再一起研究.

练习

1. 求证：圆 C_1：$x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-8x+6y+9=0$ 相外切.
2. 求过两圆 $x^2+y^2=4$，$x^2+4x+y^2-6y+4=0$ 的交点的直线方程.

习题 6

学而时习之

1. 写出满足下列条件的圆的方程：

（1）圆心在点（1，1），且过原点；

（2）圆心在 y 轴上，半径为 3，且与 x 轴相切；

（3）圆心在 x 轴上，半径为 3，且与圆 $x^2+y^2=1$ 相切；

（4）圆心在直线 $y=x$ 上，且过点（1，0），半径为 5.

2. 下列方程的图象是否是圆？如果是，请求出它的半径和圆心坐标.

（1）$x^2+y^2-4x-6y=0$；　　（2）$x^2+y^2+5x-6y=20$；

(3) $x^2+y^2-8x-6y+25=0$； (4) $x^2+3y^2-4x-6y=0$.

3. 求过三点 $A(0,0)$，$B(1,2)$，$C(2,-4)$的圆的方程，并求出它的半径和圆心坐标.

4. 判断四个点 $A(0,0)$，$B(1,-2)$，$C(-2,4)$，$D(5,6)$是否在同一个圆上？

5. 试判断下列两圆的位置关系.

(1) 圆 C_1：$(x-1)^2+y^2=4$，圆 C_2：$x^2+(y-1)^2=4$；

(2) 圆 C_1：$x^2+y^2-4x-6y-3=0$，圆 C_2：$x^2+y^2+6x+18y+9=0$；

(3) 圆 C_1：$x^2+y^2=1$，圆 C_2：$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

6. 已知圆 C_1：$x^2+y^2-4x+6y=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-6x=0$ 交于 A，B 两点，求线段 AB 的垂直平分线的方程.

温故而知新

7. 自点 $M(1,3)$向圆 $x^2+y^2=1$ 引切线，求切线的方程.

8. 已知圆 C 与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 相外切，并且与直线 $x+\sqrt{3}y=0$ 相切于点 $Q(3,-\sqrt{3})$，求圆 C 的方程.

9. 已知圆心在直线 $x+y-1=0$ 上，$A(-1,4)$，$B(1,2)$是圆上的两点.

(1) 试求该圆的方程；

(2) 若点 P 为该圆上一动点，O 为坐标原点，试求直线 OP 斜率的取值范围.

10. 已知两个圆 $x^2+y^2=9$，$x^2+(y-6)^2=r^2$ $(r>0)$，试求分别满足下列条件的 r 的取值范围.

(1) 两个圆相交； (2) 两个圆相切； (3) 两个圆相离.

11.* 已知直线 $ax+by+c=0$ $(abc\neq 0)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，试判断三边长分别为 $|a|$，$|b|$，$|c|$ 的三角形的形状，并说明理由. 若直线与圆的位置发生变化，试分析此三角形形状的变化规律.

7.4 几何问题的代数解法

解析几何的基本思想方法就是用代数方法解决几何问题，几何的最基本元素——点和曲线分别用坐标和方程表示，将点和曲线的几何性质都用坐标和方程的代数性质来表示和处理．在前几节中我们已经讨论了有关点的坐标的一些最基本的公式，得出了直线和圆的方程并用来处理了相关的一些最基本的问题，下面通过更多的例子说明怎样用代数的方法处理几何问题．

例 1　（1）证明：圆的直径上的圆周角是直角；

（2）已知 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点，满足条件 $PA\perp PB$ 的所有点 $P(x,y)$组成一条曲线，求这条曲线的方程并指出曲线的形状．

（1）**证明**　以已知圆的圆心 O 为原点，给定的直径所在的直线为 x 轴建立直角坐标系（如图 7-24），则圆的方程为

$$x^2+y^2=r^2,$$

其中 r 是圆的半径．给定的直径的两个端点分别为 $A(r,0)$，$B(-r,0)$．

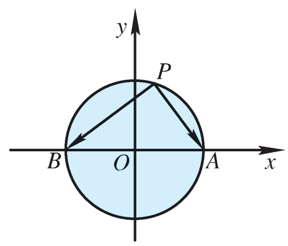


图 7-24

设 $P(x,y)$ 是圆周上任意一点，则$x^2+y^2=r^2$．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}&=(r-x,-y)\cdot(-r-x,-y)\\&=(r-x)(-r-x)+(-y)^2\\&=x^2-r^2+y^2=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad \overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}.$$

当 P 与 A，B 都不重合时，得到的圆周角$\angle APB$ 是直角．

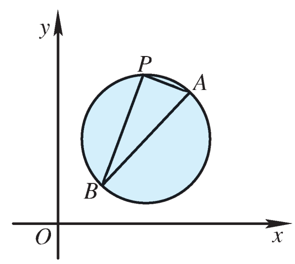


图 7-25

（2）**解**　$PA\perp PB\Leftrightarrow\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

$$\Leftrightarrow(x_1-x,y_1-y)\cdot(x_2-x,y_2-y)=0$$

$$\Leftrightarrow(x_1-x)(x_2-x)+(y_1-y)(y_2-y)=0.\qquad①$$

将等式①变形为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

上述方程左边展开，得

$$x^2-(x_1+x_2)x+y^2-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0.$$

配方，得

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2.$$

其图象是以 AB 的中点 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ 为圆心、AB 长度的一半 $\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{2}$ 为半径的圆，也就是以 AB 为直径的圆.

例 2 到两个定点 A，B 的距离的比为定值 λ（$\lambda>0$）的所有的点组成什么形状的曲线？

解 以 B 为原点、$\overrightarrow{BA}$ 的方向为 x 轴正方向，在平面上建立直角坐标系（如图 7-26）. 则 A，B 的坐标分别为 $B(0,0)$，$A(a,0)$，其中

$$a=|AB|>0.$$

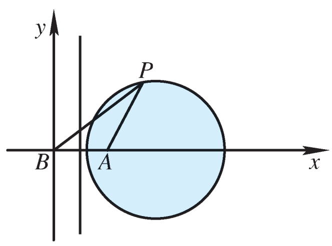


图 7-26

设 $P(x,y)$ 是平面上任意一点，则

$$|PA|=\lambda|PB|\Leftrightarrow(x-a)^2+y^2=\lambda^2(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow(1-\lambda^2)x^2+(1-\lambda^2)y^2-2ax+a^2=0. \qquad ①$$

等式①就是所求曲线的方程，我们来看曲线的形状.

当 $\lambda=1$ 时，曲线方程为 $-2ax+a^2=0$，即 $x=\frac{a}{2}$，这是线段 AB 的垂直平分线.

当 $\lambda\neq1$ 时，①式可化为

$$x^2+y^2-\frac{2a}{1-\lambda^2}x+\frac{a^2}{1-\lambda^2}=0. \qquad ②$$

配方，得

$$\left(x-\frac{a}{1-\lambda^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2. \qquad ③$$

这是圆的标准方程.

可知当 $\lambda\neq1$ 时，图象是圆.

（容易判断图象上至少有两个不同的点：直线 AB 上在 A，B 之间一点以及在 AB 外一点．因此，也可不对②配方，直接断定②是圆的一般方程．）

例 3 已知圆 C_1：$x^2+y^2+x+2y-3=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2=6$ 相交．求经过 C_1，C_2 的交点的直线方程．

这就是 7.3.3 节的例 5，那里的解法很繁．这里另给一种解法．

将这里的解法与 7.3.3 节中例 5 的解法比较，你更喜欢哪一个？

解 两个交点 A，B 的坐标都满足方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+2y-3=0, & ① \\ x^2+y^2-6=0. & ② \end{cases}$$

①－②，得

$$x+2y+3=0. \qquad ③$$

这是二元一次方程，它的图象是直线．

两圆的交点坐标同时满足方程①，②，因此也满足方程③，也就是说，这两个交点 A，B 都在直线 $x+2y+3=0$ 上．

因此，$x+2y+3=0$ 就是经过 A，B 的直线方程，恰如所求．

练习

1. 试求到两坐标轴距离相等的所有的点组成的曲线的方程，并指出它的形状．
2. 已知 AB 是圆 C 的弦，点 P 是弦 AB 的中点，求证：$CP\perp AB$．

习题 7

学而时习之

1. 求证：长方形的对角线长相等．
2. 已知两条直线 l_1：$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，l_2：$y=\sqrt{3}x$，求到这两直线距离相等的所有的点组

成的曲线的方程.

温故而知新

3. 过原点 O 作圆 $x^2+y^2-2x=0$ 的弦 OA，求当 A 变动时，OA 的中点 P 所组成的曲线的方程.

4. 求证：菱形的对角线互相垂直平分.

7.5 空间直角坐标系

在研究平面图形时，我们可以建立平面直角坐标系，用一对有序实数组成的坐标(x,y)表示点的位置.

比如，可以将地球上一块不算太大的水平面（地面或海面）近似地当作平面. 在这个平面上选取一个基准点 O（比如选海边某个码头）作为原点，取正东方向作为 x 轴的正方向，正北方向作为 y 轴的正方向，再选取千米作为长度单位，就建立了一个直角坐标系. 假如海面上某艘船所在位置 A 点在这个坐标系下的坐标是（200，-50），那就是说从 O 往东走 200 km、再向北走 -50 km（也就是向南 50 km），就到达 A 点. 如果用位移向量来表示，就是

$$\overrightarrow{OA}=200\boldsymbol{e}_1-50\boldsymbol{e}_2,$$

其中 $\boldsymbol{e}_1$ 表示向东运动 1 km，$\boldsymbol{e}_2$ 表示向北运动 1 km.

但是，如果在位置 A 时船的正上方 0.5 km 处有一架直升机，在这艘船的正下方 0.8 km 处还有一艘潜水艇，怎样用坐标来表示直升机所在位置 B 和潜水艇所在位置 C 呢？我们知道，从 O 到达 A 之后还需要再向上 0.5 km 才能到

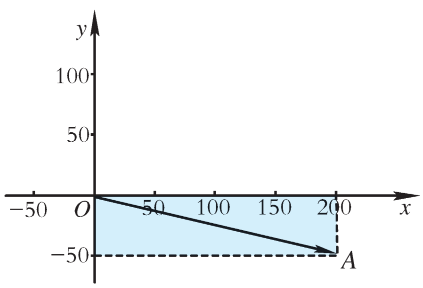


图 7-27

达 B，从 O 到达 A 之后还需要再向下 0.8 km 才能到达 C. 将向上运动1 km的位移记作 $\boldsymbol{e}_3$，则

$$\overrightarrow{OB}=200\boldsymbol{e}_1-50\boldsymbol{e}_2+0.5\boldsymbol{e}_3,$$

$$\overrightarrow{OC}=200\boldsymbol{e}_1-50\boldsymbol{e}_2-0.8\boldsymbol{e}_3.$$

这样，从原点 O 到 B 或 C 的位移就被分解为东西方向、南北方向和上下方向等三个方向的运动，用三个数组成坐标才能表示位移向量，从而表示终点的坐标.

比如：上述直升机的位置 B 的坐标应为$(200,-50,0.5)$，表示从 O 到 B 要向东 200 km、向南 50 km、向上 0.5 km.

潜水艇的位置 C 的坐标应为$(200,-50,-0.8)$，表示从 O 到 C 要向东 200 km、向南 50 km、向下 0.8 km.

而对于在海面上的船所在的位置 A，尽管从 O 到 A 向东 200 km、向南 50 km 就到达了，不用再向上下方向运动，但我们还是认为它向上运动了 0 km，即

$$\overrightarrow{OA}=200\boldsymbol{e}_1-50\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3,$$

位置 A 的空间坐标为$(200,-50,0)$.

此例中既然用了三个实数来组成空间坐标，就需要过原点 O 的 3 条有向直线组成坐标轴：除了一条向东的有向直线、向北的有向直线外，还需要一条向上的有向直线.

一般地，在空间取定一个点作为原点 O，过原点 O 作三条两两垂直的直线作为坐标轴，分别叫作 x 轴、y 轴、z 轴，在这三条轴上分别取定正方向，并选取一个长度单位作为三条坐标轴上共同使用的长度单位. 这就建立了一个空间直角坐标系.

如图 7-28，设 P 是空间任意一点. 过 P 作三个平面分别与 x 轴、y 轴、z 轴垂直相交，交点分别是 X_1，Y_1，Z_1. X_1 在 x 轴上代表一个实数 x_1，Y_1 在 y 轴上代表一个实数 y_1，Z_1 在 z 轴上代表一个实数 z_1，这三个实数按顺序排成一组(x_1,y_1,z_1)，就称为 P 点的坐标. 反过来，任意给定三个实数组成一个坐标(x_1,y_1,z_1)，这三个实数 x_1，y_1，z_1 在三条坐标轴上分别对应于点 X_1，Y_1，Z_1，过这三点分别作平面垂直于各点所在的坐标轴，则这三个平面相交于唯一的一点 P，

P 的坐标就是(x_1,y_1,z_1). 这就建立了空间的点与坐标的一一对应关系.

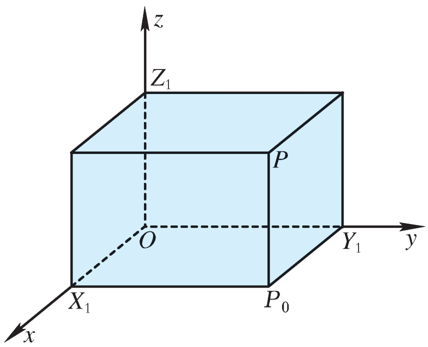


图 7-28

空间坐标也可以这样来理解：将 x 轴、y 轴所在的平面称为 Oxy 平面. 过 P 作直线与 Oxy 垂直相交于点 P_0. 以 z 轴正方向为正、用一个实数 z_1 来表示有向线段 $\overrightarrow{P_0P}$，就是 P 的 z 坐标. z_1 可以想象成 P 相对于 Oxy 平面的高度. 原点 O、x 轴和 y 轴在 Oxy 平面内组成平面直角坐标系，P_0 在这个坐标系下的平面坐标(x_1,y_1)就分别是 P 点的 x 坐标和 y 坐标.

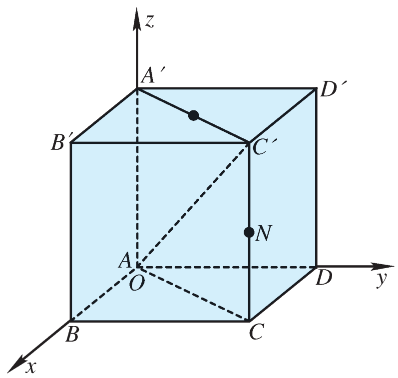


图 7-29

例 1 如图 7-29 所示，设有长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，长、宽、高分别为 $|AB|=4$ cm，$|AD|=3$ cm，$|AA'|=5$ cm. N 是线段 CC'的中点.

以 A 为原点，分别以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA'}$为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，以 1 cm 为单位长度，建立空间直角坐标系.

(1) 求 A，B，C，D，A'，B'，C'，D'的坐标；

(2) 求 N 的坐标；

(3) 求这个长方体的对角线 AC'的长度.

解 (1) A，B，C，D 都在平面 Oxy 内，z 坐标都为 0. 它们在 x 轴、y 轴所组成的平面直角坐标系中的坐标分别是$(0,0)$，$(4,0)$，$(4,3)$，$(0,3)$，因此它们的空间坐标分别是

$$A(0,0,0)，B(4,0,0)，C(4,3,0)，D(0,3,0).$$

A'，B'，C'，D'同在一个垂直于 z 轴的平面内，这个平面与 z 轴的交点 A'在 z 轴上代表的实数是 5，因此这四点的 z 坐标都是 5. 从这四点作平面 Oxy 的垂线分别交平面 Oxy 于 A，B，C，D 四点，因此 A'，B'，C'，D'的 x，y 坐标分别与 A，B，C，D 相同. 由此

可知它们的空间坐标分别是

$$A'(0,0,5),\ B'(4,0,5),\ C'(4,3,5),\ D'(0,3,5).$$

(2) N是线段CC'的中点，有向线段$\overrightarrow{CN}$的方向与z轴正方向相同，$|CN|=2.5$，因此N的z坐标为2.5，C在Oxy平面内的平面坐标为(4,3)，这就是N的x，y坐标，故N的空间坐标为(4,3,2.5).

(3) 连结AC，则在Rt△ABC中，可用勾股定理算出

$$|AC|=\sqrt{|AB|^2+|BC|^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

CC'垂直于底面$ABCD$，因此CC'垂直于底面内的线段AC，故$\angle ACC'$为直角. 在Rt△ACC'中，用勾股定理可算出

$$|AC'|=\sqrt{|AC|^2+|CC'|^2}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}.$$

故所求对角线AC'的长度为$5\sqrt{2}$ cm.

例1中（3）的方法可以用来计算一般的长方体（或正方体）的对角线长，即：

设长方体(或正方体)$ABCD$-$A'B'C'D'$的棱长$|AB|=a$，$|AD|=b$，$|AA'|=c$，则对角线AC'的长

$$|AC'|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

长方体对角线长的平方等于长、宽、高的平方和

例 2 设点P在空间直角坐标系中的坐标为(4,3,5). 求原点O到P点的距离$|OP|$.

解 过点P分别作平面垂直于三条坐标轴，与三个坐标平面一起围成长方体$OA_0P_0D_0$-$O'APD$，如图7-30.

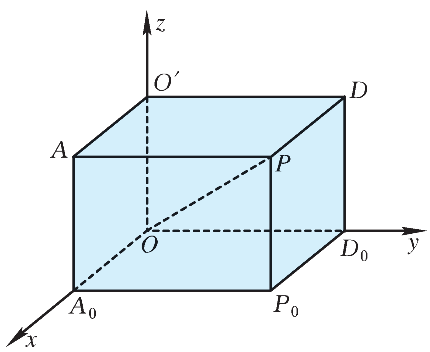


图 7-30

由点P的坐标可知$|OA_0|=4$，$|OD_0|=3$，$|OO'|=5$. 所求距离$|OP|$就是这个长方体的对角线OP的长度，即

$$|OP|=\sqrt{4^2+3^2+5^2}=5\sqrt{2}.$$

由例 2 的方法（也就是例 1（3）的方法）可以得出原点到任意一点 $P(x,y,z)$的距离公式

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例 3 在空间直角坐标系中，求两点 $P(x_1,y_1,z_1)$与 $Q(x_2,y_2,z_2)$之间的距离.

解 分别过 P，Q 点作垂直于三条坐标轴的平面，得到 6 个平面，围成一个长方体(或正方体)，如图 7-31.

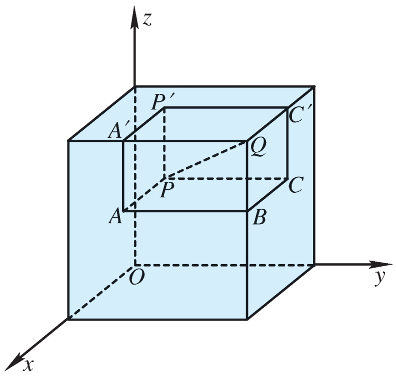


图 7-31

它的三条棱长各是

$$|PA|=|x_2-x_1|,$$
$$|PC|=|y_2-y_1|,$$
$$|PP'|=|z_2-z_1|.$$

PQ 是这个长方体的一条对角线，其长度

$$|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

这就是求两点 $P(x_1,y_1,z_1)$,$Q(x_2,y_2,z_2)$之间的距离的公式.

例 4 已知两点 $P(1,0,1)$与 $Q(4,3,-1)$.

(1) 求 P，Q 之间的距离；

(2) 求 z 轴上一点 M，使 $|MP|=|MQ|$.

解 (1) $|PQ|=\sqrt{(4-1)^2+(3-0)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{22}$.

(2) M 在 z 轴上，可设它的坐标为$(0,0,z)$.

$$|MP|^2=1^2+0^2+(z-1)^2=z^2-2z+2,$$

$$|MQ|^2=4^2+3^2+(z+1)^2=z^2+2z+26.$$

由 $|MP|=|MQ|$，得

$$z^2-2z+2=z^2+2z+26.$$

解得 $z=-6$. 故所求点为 $M(0,0,-6)$.

练习

1. 指出下列各点在哪条坐标轴上或哪个坐标平面上：

(1) $(-4,0,0)$；　　(2) $(0,-7,0)$；

(3) $(0,-7,2)$；　　(4) $(-5,0,3)$.

2. 求点 $P(4,-3,5)$ 到坐标原点的距离.

习题 8

学而时习之

1. 求顶点为 $A(2,1,4)$, $B(3,-1,2)$, $C(5,0,6)$ 的三角形各边的长.
2. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的四个顶点分别为 $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,2,0)$, $A_1(0,0,3)$，求其余各顶点的坐标以及对角线的长.
3. 在 Oyz 平面内求一点，使它与三个已知点 $A(3,1,2)$, $B(4,-2,-2)$, $C(0,5,1)$ 等距离.

温故而知新

4. 在空间直角坐标系中，已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(1,-1,0)$, $B(-1,3,0)$, $C(3,0,0)$，求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

小结与复习

一、指导思想

解析几何的基本内容，是用代数方法研究几何问题.

基本思想方法是：将几何问题变成代数问题，用代数的方法求解，再将所得到的结论用几何的语言翻译出来.

二、主要内容

1. 点的坐标.

两点间的距离公式：两点 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$ 的距离

$$|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

定比分点坐标公式：分两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 所构成的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 为定比 λ 的分点坐标为 $\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.

三角形重心坐标公式：以 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 为顶点的三角形的重心坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

三角形面积的公式：以向量 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 为两边的三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$.

2. 直线与方程.

(1) 二元一次方程 $Ax+By+C=0$ 的图象是直线.

(2) 直线的方向与直线方程：

直线垂直于向量 (A,B)(法向量)$\Leftrightarrow$直线方程为 $Ax+By+C=0$ (C 待定).

直线的斜率为 $k\Leftrightarrow$直线方程为 $y=kx+b$ (b 待定).

直线平行于向量 $(a, b)\Leftrightarrow$直线垂直于向量 $(-b, a)$.

过两点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 的直线⇒直线平行于向量 (x_2-x_1, y_2-y_1) ⇒直线垂直于向量 (y_1-y_2, x_2-x_1). 当 $x_2 \neq x_1$ 时，斜率为 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

(3) 两条直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$ 的相互关系：

两条直线相交⇔$A_1B_2-A_2B_1\neq 0$；

两条直线平行⇔存在 λ 使 $A_2=\lambda A_1$，$B_2=\lambda B_1$，$C_2\neq\lambda C_1$；

两条直线重合⇔存在 λ 使 $A_2=\lambda A_1$，$B_2=\lambda B_1$，$C_2=\lambda C_1$；

两条直线垂直⇔$A_1A_2+B_1B_2=0$.

(4) 点 $P(x_1, y_1)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

3. 圆与方程.

(1) 标准方程：以 (a, b) 为圆心、r 为半径的圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

(2)一般方程:形如 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$ 的方程,其中圆心坐标为$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径为$\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

(3) 圆与直线的相互关系，由圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 的相互关系决定：

相离⇔$d>r$；　相交⇔$d<r$；　相切⇔$d=r$.

(4) 圆与圆的相互关系由两圆的半径 R，r 及圆心距 d 决定. 有如下关系：(不妨设 $R\geqslant r$)

外离 ⇔ $d>R+r$；外切 ⇔ $d=R+r$；

相交 ⇔ $R-r<d<R+r$；

内切 ⇔ $d=R-r>0$；

内含 ⇔ $d<R-r$；同心 ⇔ $d=0$.

4. 空间直角坐标.

(1) 空间点的坐标通常用三个有序实数 x，y，z 来表示，记为(x,y,z).

(2) 空间两点 $P(x_1, y_1, z_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2)$的距离

$$|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

三、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求.

(1) 直线与方程.

① 掌握直线的一般式方程 $Ax+By+C=0$，了解(A,B)是这条直线的法向量.

② 对各种方式描述的直线都能通过法向量求出直线方程.

③ 会将两条直线的位置关系转化为法向量之间的关系来判定.

④ 对于与 x 轴不垂直的直线，体会它的斜率及斜截式与一次函数的关系. 能通过斜率求出直线的方程，包括点斜式、斜截式、两点式等.

⑤ 能用解方程组的方法求两直线的交点坐标.

⑥ 掌握两点间的距离公式、点到直线的距离公式，会求两条平行直线间的距离. 体会通过向法向量方向作投影求点到直线的距离的思路.

(2) 圆与方程.

① 探索并掌握圆的标准方程与一般方程.

② 能根据给定的直线、圆的方程，判断直线与圆、圆与圆的位置关系.

③ 能用直线和圆的方程解决一些简单的问题.

(3) 借助向量熟练掌握几何的语言与代数的语言之间的转化，体会用代数方法处理几何问题的思想. 例如：

几何的语言	向　量	代数语言
点 P	$\overrightarrow{OP}$	点 P 的坐标为(x,y)
P,Q 两点间距离	$\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$	$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
P_1 到直线的距离	$\overrightarrow{P_0P_1}$在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影长	$d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$
M 是线段 AB 中点	$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$	M 的坐标$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$

（4）空间直角坐标系.

① 通过具体情境，感受建立空间直角坐标系的必要性，了解空间直角坐标系，会用空间直角坐标系刻画点的位置.

② 通过表示特殊长方体（所有棱分别与坐标轴平行）顶点的坐标，探索并得出空间两点间的距离公式.

2. 需要注意的问题.

（1）数形结合思想应贯穿平面解析几何的始终.

（2）向量是沟通几何、代数的桥梁，要主动利用这个工具解决相关问题.

（3）将几何问题转为代数问题之前，要注意充分利用图形的几何性质，这样可以简化运算量.

四、参考例题

例 1　如图 7-32，圆 C:$(x-1)^2+y^2=9$ 内有一点 $P(2,2)$,过点 P 作直线 l 交圆于 A，B 两点.

（1）当直线 l 经过圆心 C 时，求直线 l 的方程；

（2）当弦 AB 被点 P 平分时，写出直线 l 方程；

（3）当直线 l 倾斜角为$\dfrac{\pi}{4}$时，求弦 AB 的长.

解　（1）∵　圆心 C 的坐标为$(1,0)$，　∴　$\overrightarrow{CP}=(1,2)$，

直线 l 的法向量 $\boldsymbol{n}=(-2,1)$. 设 l 的方程是 $-2x+y+c=0$.

∵　点 $C(1,0)$ 在直线上，

$-2\times1+0+c=0$，　$c=2$，

∴　l 的方程为 $2x-y-2=0$.

(2)当弦 AB 被点 P 平分时，连 CP，则 $CP\perp AB$，$\overrightarrow{CP}=(1,2)$是 l 的法向量.

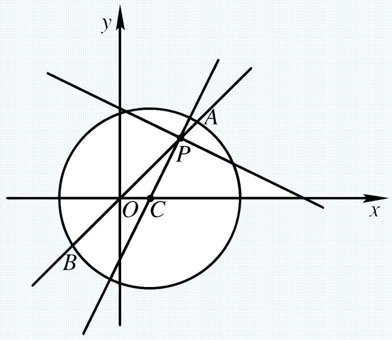


图 7-32

设直线 l 的方程为 $x+2y+c=0$，

又∵　l 过点 $P(2,2)$，

$2+4+c=0$，　$c=-6$，

∴　直线 l 的方程为 $x+2y-6=0$.

(3)设直线 l 的方程为 $y=x+b$.

∵　直线 l 过点 P，　$2=2+b$，　$b=0$.

∴　直线 l 的方程为 $y=x$.

点 C 到直线 l 的距离为

$$d=\frac{|1-0|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

∴　$|AB|=2\sqrt{|CA|^2-d^2}$

$$=2\sqrt{9-\frac{1}{2}}=\sqrt{34}.$$

例 2　已知点 P (x，y) 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动，求$\frac{y}{x+2}$的最大值与最小值.

解　思路一：令$\frac{y}{x+2}=k$，则 $y=k(x+2)$，代入圆方程得

$$x^2+[k(x+2)]^2=1,$$

即
$$(k^2+1)x^2+4k^2x+(4k^2-1)=0.$$

x 有实数解的条件为$(4k^2)^2-4(k^2+1)(4k^2-1)\geqslant0$.

即　$k^2\leqslant\frac{1}{3}$，　$|k|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，　$-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$.

∴　$\frac{y}{x+2}$的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，最小值为$-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

思路二：$\because$ $\dfrac{y}{x+2}=\dfrac{y-0}{x-(-2)}$表示点 $P(x,y)$与点 $A(-2,0)$连线的斜率，由图 7-33，知当直线 PA 与圆相切时，斜率取最大值或最小值.

$\because$ $|OA|=2$，$|OP|=1$，

$\therefore$ $\angle PAO=30°$.

$\therefore$ $k_{AP}=\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$ 最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，最小值为$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

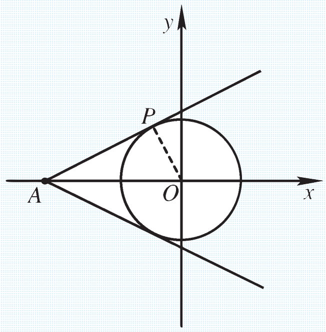


图 7-33

复习题七

学而时习之

1. 已知点 $A(3,4)$，点 B 在直线 $y=x+1$ 上，且 $|AB|=6\sqrt{2}$，求点 B 的坐标.
2. 已知点 $A(8,1)$，$B(1,8)$，且 $4\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BC}$，求线段 AC 的中点坐标.
3. 已知两点 $A(1,2)$，$B(-3,-2)$，点 C 在直线 AB 上，且 $|AC|=2|CB|$，求过点 C 且与直线 AB 垂直的直线方程.
4. 已知等腰 Rt$\triangle ABC$（B 为直角顶点）的两个顶点分别为 $A(0,4)$，$C(6,0)$，求三边所在直线的方程.
5. 求过点 $A(1,2)$并且在两坐标轴上的截距相等的直线方程.
6. 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(-3,1)$，$B(1,2)$，$C(5,2)$，求其外接圆的方程.
7. 过圆 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 内一点 P（1，-2）作弦 AB，使得点 P 为弦 AB 的中点，求直线 AB 的方程.
8. 求过点 $A(0,1)$且被圆 C：$(x-4)^2+y^2=25$ 所截的弦长为 6 的直线方程.
9. 已知点 A 是圆 C：$x^2+y^2-4x=0$ 上一动点，O 为坐标原点，连 OA 并延长到

B，使 $|OA|=|AB|$. 问所有满足条件的点 B 组成的曲线是什么形状的曲线？

温故而知新

10. 已知 $\triangle ABO$ 的三个顶点分别为 $A(-8,0)$，$B(0,15)$，$O(0,0)$，求其内心坐标.

11. 已知两直线 l_1：$ax-2y+1=0$ 与 l_2：$x-ay-2=0$.

    (1) 当 $l_1 /\!/ l_2$ 时，求 a 的值并求这两直线之间的距离；

    (2) 试判断 l_1 与 l_2 能否垂直. 若能，求 a 的值；若不能，试说明理由.

12. 若三条直线 l_1：$x+y+a=0$，l_2：$ax+ay+1=0$，l_3：$ax+y+1=0$ 能构成一个三角形，试求实数 a 的范围.

13. 直线 l 过点 $M(-1,0)$，且与以 $P(2,-3)$，$Q(4,0)$ 为端点的线段恒相交，求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

14. 已知平面上四点 $O(0,0)$，$A(4,0)$，$B(0,-2)$，$C(1,-3)$，试判断这四点是否共圆. 若共圆，则求出该圆方程；否则，请说明理由.

15. 自点 $A(-3,3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上，被 x 轴反射后，其反射光线所在直线与圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切，求光线 l 所在直线的方程.

16. 已知圆的方程为 $x^2+y^2-6mx-2(m-1)y+10m^2-2m-24=0$，$m\in\mathbf{R}$. 求证：无论 m 为何值，圆心都在一条直线 l 上，并求出该直线方程.

17. 已知点 $P(x,y)$ 在圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 上，求 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值与最小值.

上下而求索

凹面镜与凸透镜

18. 请自己动手，参照本章开始的数学实验“凹面镜的反射”中所说方案，研究反射面为球面的凹面镜的聚光性能，如图 7-34 (a).

    (1) 利用画图工具(三角板、直尺、圆规、量角器等)自己画图研究如下问题：

    ①观察与 x 轴平行的光线是否交于一点；

    ②观察从半径 CO 的中点 $F(0.5,0)$ 发出的光线经过反射后是否平行. 如

果不平行，猜一猜镜面曲线应当作怎样的调整才有可能使反射光线平行？

(2) 对于镜面圆弧$\overset{\frown}{OA}$上坐标为(x,y)的点，计算反射光线与x轴交点的横坐标．通过计算机画图或理论分析，研究当y足够小的时候反射光线与x轴的交点是否近似地固定不变．

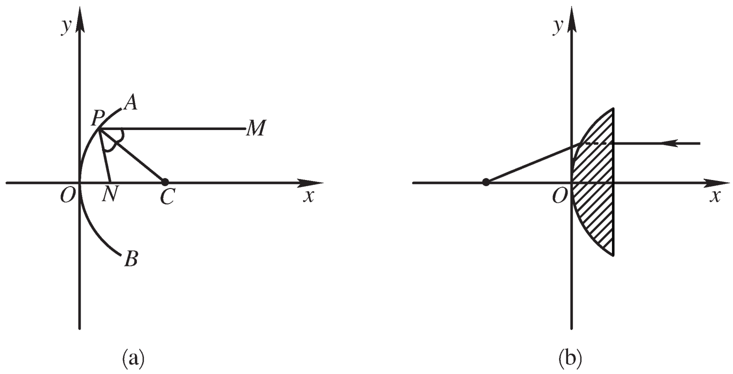


图 7-34

19．如果有兴趣，尝试根据光的折射定律研究凸透镜(如图 7-34(b))的聚光性能．

数学文化

笛卡儿之梦

笛卡儿（René Descartes，1596—1650）是近代西方哲学的奠基人之一、数学家、自然科学家．他创立了解析几何，推动数学由研究常量的初等数学发展成研究变量为主的高等数学，是数学史上划时代的伟大数学家．1612 年，笛卡儿获巴黎普瓦捷大学法学博士学位，当了一名律师．1628 年移居荷兰，潜心研究数学 20 余年，为人类的科学事业做出了不朽的贡献．1637 年出版名著《几何学》，建立的坐标系是现代数学科学赖以繁衍生息的数学大厦的框架．笛卡儿的童年过得并不幸福，其母生他时去世，笛卡儿也险些夭折，他的名字中 René 是重生的意思．但他生性机敏，好奇心强，当时他上的教会学校向学生灌输宗教的陈词滥调，笛卡儿看穿了它的破绽和荒谬，课后直言："没有一件事不是可疑的！"他后来在名著《方法论》中写道："必须严肃地把我以前接受的一切见解统统去掉，重新开始从根本做起．"他认为欧几里得几何缺乏动感和想象力，只能在人们想象力缺乏的条件下，训练人的理解力，而代数则缺乏直观性．他梦寐以求的是建立能够克服两者的缺点而保留两者的优点的一种数形结合的新几何．他的数学信念是：

一切问题可以化成数学问题，

一切数学问题可以化成代数问题，

一切代数问题可以化成方程求解的问题．

一个时期，他满脑子里净是这种念头和思绪，一旦时机成熟就会灵感涌现，创造出解决长期梦魂萦绕的问题的办法．笛卡儿传记作家巴耶说，1619 年 11 月 10 日，笛卡儿向他充满激情地叙述了他昨晚做的三个梦：第一个梦梦见自己被风暴吹到了一个没有风暴

的乐园；第二个梦梦见自己拾到一串打开大自然宝库的钥匙；第三个梦梦见自己大声背诵诗句：“我应该沿哪条人生之路向前走呢？”就在这一天，他又拿出多次研究的帕波斯问题来思考．帕波斯是古希腊的大数学家，公元 4 世纪帕波斯在名著《数学汇编》中提出如下问题，直到 17 世纪无人解出：

平面上画了五条直线 l_1，l_2，l_3，l_4，l_5 和动点 P．由 P 向这五条直线分别作线段 PA_1，PA_2，PA_3，PA_4，PA_5，A_i 在 l_i 上，$i=1$，2，3，4，5，且 PA_i 与 l_i 夹角为 α_i．求满足 $PA_1\cdot PA_2\cdot PA_3=kPA_4\cdot PA_5$ 的动点 P 的轨迹，其中 α_i 与 k 是常数．

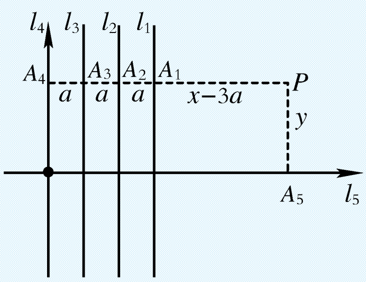
笛卡儿考虑 $l_1/\!/l_2/\!/l_3/\!/l_4\perp l_5$ 的情形，且 l_1，l_2，l_3，l_4 的间距为 a（$a>0$ 常数）．他设 $PA_4=x$，$PA_5=y$，于是 $PA_1=x-3a$，$PA_2=x-2a$，$PA_3=x-a$．欲满足 $PA_1\cdot PA_2\cdot PA_3=kPA_4\cdot PA_5$，即

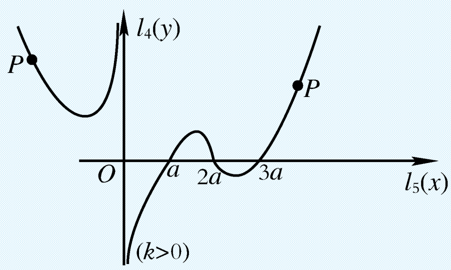
$$(x-3a)(x-2a)(x-a)=kxy,x^3-6ax^2+11a^2x-6a^3=kxy.$$

所求的动点 P 距 l_5 的距离 y 与 P 距 l_4 的距离 x 应满足代数方程

$$x^3-6ax^2+11a^2x-6a^3=kxy. \qquad ①$$

笛卡儿取 l_4 与 l_5 为参照框架，以两个变量 x 与 y 来表示动点 P 的位置，把动点的轨迹曲线用代数方程①来表示，这恰为解析几何思想的种子，x，y 现称为点 P 的横坐标与纵坐标，l_5 为 x 轴，l_4 为 y 轴，点 P 的轨迹牛顿称之为笛卡儿三次曲线或三叉戟曲线（如下图所示）．





后来人们对笛卡儿之梦解释为，第一个梦暗示笛卡儿从宗教与战争等人间的邪恶风暴中来到幽静美好的数学园地；第二个梦暗示笛卡儿拾到了数形结合大门的魔钥匙；第三个梦暗示笛卡儿应该用

坐标与代数方程的魔钥匙打开解析几何的大门向高等数学的方向走.

笛卡儿的梦想实现了. 数学灵感并非人人都能有的，它是以对前人的数学理论与方法已有全面透彻的掌握为基础，经过自己对问题的勤奋不懈的深思熟虑才能得到的果实.

由于笛卡儿提倡科学方法论，主张必须从根本上铲除经院哲学的旧传统，把科学建立在实验基础上，任何具体的问题的解答都应从完全确实的概念出发演绎而得，因而得罪了梵蒂冈，招致教会的残酷迫害. 1647 年，梵蒂冈教会把笛卡儿的著作列为“禁书”，宣布必须全部焚毁. 笛卡儿去世时，竟无人敢去为这位为人类的科学事业贡献了毕生精力的伟人送葬，最后几个邻居把他的尸体草草掩埋了事. 17 年之后，法国政府下令把他的骨灰运回祖国，安葬在法国伟人公墓，1819 年起保存在圣日耳曼圣心堂. 笛卡儿墓碑上刻：

笛卡儿，
欧洲文艺复兴以来，
为人类争取并保证理性权利的第一人.

附　录

数学词汇中英文对照表

（按词汇所在页码的先后排序）

中文名	英　文　名	页　码
多面体	polyhedron	3
面	face	3
棱	edge	3
顶点	vertex	3
棱柱	prism	4
底面	base face	4
侧面	side face	4
侧棱	lateral edge	4
直棱柱	right prism	4
长方体	cuboid	4
正方体	cube	4
平行六面体	parallelopiped	5
棱锥	pyramid	6
棱台	prismoid	6
圆柱	circular cylinder	7
圆锥	circular cone	7
圆台	frustum of cone	7
轴	axis	7
高	height	7
母线	generating line	7
球	ball	8
球面	sphere	8
球心	center of sphere	8
半径	radius	8

中心投影	central projection	15
平行投影	parallel projection	15
拟柱体	prismatoid	21
异面直线	non-coplanar lines	29
垂直	perpendicular	46
垂线	perpendicular line	46
垂面	perpendicular plane	46
垂足	foot of a perpendicular	46
原点	origin	69
位置向量	position vector	69
单位向量	unit vector	69
基	basis	69
坐标	coordinates	69
距离	distance	70
长度	length	70
比	ratio	72
一次函数	linear function	74
直线	line	74
图象	figure	75
一般式方程	equation of general form	77
法向量	normal vector	77
两点式方程	equation of two points form	80
倾斜角	angle of inclination	94
斜率	slope	94
点斜式方程	equation of point slope form	96
截距	intercept	96
斜截式方程	equation of slope intercept form	97
圆	circle	100
圆心	center	100
圆的标准方程	standard equation of circle	100
圆的一般方程	general equation of circle	104